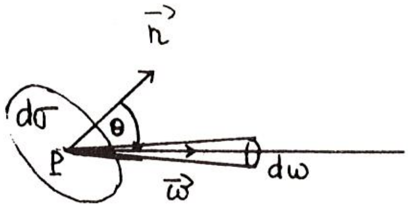
NOTIONS DE THEORIE DU TRANSFERT DU RAYONNEMENT

I- DESCRIPTION DU CHAMP DE RAYONNEMENT.

1- Intensité spécifique du rayonnement.



Considérons une surface élémentaire $d\sigma$, autour du point P; soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à $d\sigma$ et une direction quelconque caractérisée par le vecteur unitaire $\vec{\omega}$. Si θ est l'angle que fait $\vec{\omega}$ avec $\vec{n}$, on a $\vec{\omega} \cdot \vec{n} = \cos\theta$

Nous nous intéressons au rayonnement qui traverse $d\sigma$ dans la direction $\vec{\omega}$, à l'intérieur de l'angle solide élémentaire $d\omega$. Si dE_ν est la quantité d'énergie de fréquence $(\nu, d\nu)$ qui traverse $d\sigma$ pendant le temps dt dans l'angle solide $d\omega$ autour de la direction $\vec{\omega}$, on définit l'intensité spécifique du rayonnement I_ν par:

$$dE_\nu = I_\nu \, d\nu \, d\sigma \cos\theta \, d\omega \, dt$$

Ce qui signifie que I_ν est la quantité d'énergie lumineuse de fréquence ν à $d\nu = 1$ près, qui traverse chaque seconde une surface de 1 cm^2 en se propageant dans la direction perpendiculaire à cette surface, à l'intérieur d'un angle solide égal à l'unité.

Dans le cas général, I_ν est fonction de la fréquence ν, de la position $\vec{r}$ du point P, de la direction de propagation $\vec{\omega}$ et du temps t:

$$\boxed{I_\nu = I_\nu(\vec{r}, \vec{\omega}, t)}$$

Les valeurs de I_ν pour l'ensemble des valeurs des 4 paramètres ν, $\vec{r}$, $\vec{\omega}$ et t, constituent le champ général de rayonnement.

On rencontre un certain nombre de cas particuliers intéressants:

- champ de rayonnement <u>isotrope</u>: I_ν ne dépend pas de la direction $\vec{\omega}$.
- champ de rayonnement <u>homogène</u>: I_ν ne dépend pas de la position $\vec{r}$.
- champ de rayonnement <u>stationnaire</u>: I_ν ne dépend pas du temps t.
- champ de rayonnement <u>à symétrie axiale</u>: I_ν ne dépend pas de l'angle azimutal φ, mais seulement de r et θ.

Dans ce qui suit nous nous limiterons au cas stationnaire:

$$\boxed{I_\nu = I_\nu(\vec{r}, \vec{\omega})}$$

On définit l'intensité spécifique intégrée sur toute la bande des fréquences:

$$I(\vec{r}, \vec{\omega}) = \int_0^\infty I_\nu(\vec{r}, \vec{\omega})\, d\nu$$

2- Flux net et vecteur flux net.

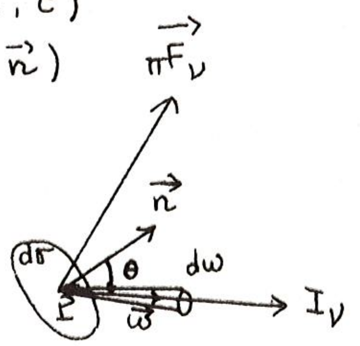
On appelle <u>"flux net"</u> la quantité d'énergie πF_ν, de fréquence ν à $d\nu = 1$ près qui traverse la surface unité chaque seconde, en se dirigeant dans n'importequelle direction. On a donc:

$$\int_{4\pi} I_\nu\, d\nu\, dt\, d\sigma \cos\theta\, d\omega = \pi F_\nu\, d\nu\, dt\, d\sigma$$

d'où:
$$\boxed{\pi F_\nu = \int_{4\pi} I_\nu \cos\theta\, d\omega}$$

Dans le cas général: $\pi F_\nu = \pi F_\nu(\vec{r}, \vec{n}, t)$

Dans le cas stationnaire: $\pi F_\nu = \pi F_\nu(\vec{r}, \vec{n})$



On définit le <u>vecteur flux net</u>:

$$\pi \vec{F}_\nu(\vec{r}) = \int_{4\pi} I_\nu(\vec{r}, \vec{\omega})\, \vec{\omega}\, d\omega$$

Alors le flux net πF_ν est la projection de $\pi\vec{F}_\nu$ sur la direction $\vec{n}$:

Si on exprime la position $\vec{r}$ du point P en fonction des coordonnées sphériques r, θ, φ :

$$\pi F_\nu = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_\nu\left[(r,\theta,\varphi),\vec{\omega}\right] \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

que l'on peut écrire sous la forme:

$$\pi F_\nu = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} I_\nu \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi - \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\pi}^{\pi/2} I_\nu \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \pi F_\nu^{+} - \pi F_\nu^{-}$$

où πF_ν^{+} et πF_ν^{-} sont respectivement le flux ~~net~~ sortant et le flux ~~net~~ entrant, par rapport à la direction $\vec{n}$.

Question T1.

Montrer que πF_ν^{+} est la quantité d'énergie qui traverse la surface unité dans un sens ("extérieur") et πF_ν^{-} la quantité d'énergie qui traverse cette même surface dans l'autre sens.

On définit aussi un flux net intégré $\pi F = \int_0^\infty \pi F_\nu \, d\nu$

En posant $\mu = \cos\theta$ d'où $d\mu = -\sin\theta \, d\theta$, on peut écrire:

$$\pi F_\nu = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\mu=-1}^{+1} I_\nu(\mu,\varphi) \, \mu \, d\mu \, d\varphi$$

Question T2.

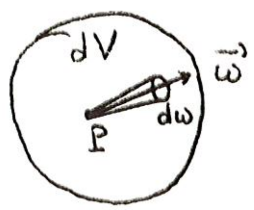
Montrer que pour un champ de rayonnement isotrope:

$$\pi F_\nu^{+} = \pi F_\nu^{-} = \pi I_\nu$$

3- Densités d'énergie de rayonnement.

Considérons la quantité d'énergie dE_ν contenue dans le volume dV, se propageant dans la direction $\vec{\omega}$ à l'intérieur de l'angle solide $d\omega$, ayant la fréquence ν à $d\nu$ près:

$$dE_\nu = u_\nu(\vec{r}, \vec{\omega}) \, d\nu \, d\omega \, dV$$



u_ν est donc la quantité d'énergie lumineuse de fréquence ν à $d\nu = 1$ près, qui se propage dans la direction $\vec{\omega}$ à l'intérieur d'un angle solide unité, contenue dans le volume unité entourant le point P.

On définit aussi la densité d'énergie intégrée:

$$u(\vec{r}, \vec{\omega}) = \int_0^\infty u_\nu(\vec{r}, \vec{\omega})\, d\nu$$

et la densité d'énergie globale, c'est-à-dire intégrée sur toutes les directions:

$$u_\nu(\vec{r}) = \int_{4\pi} u_\nu(\vec{r}, \vec{\omega})\, d\omega$$

Question T3.

Enoncez avec une phrase la signification de $u_\nu(\vec{r})$.

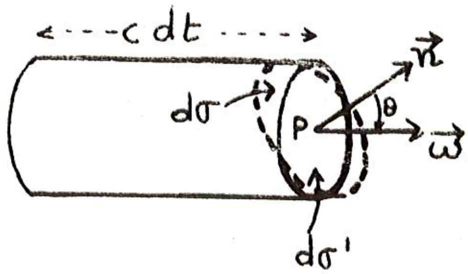
4- Relation entre la densité d'énergie et l'intensité spécifique du rayonnement.

Considérons la surface élémentaire $d\sigma$ autour du point P, orientée par la normale $\vec{n}$ et considérons l'énergie lumineuse se propageant dans la direction $\vec{\omega}$.

La quantité d'énergie de fréquence $(\nu, d\nu)$ traversant pendant dt la surface $d\sigma$ dans l'angle solide $d\omega$ autour de $\vec{\omega}$ est

$dE_\nu = I_\nu(\vec{r}, \vec{\omega})\, d\nu\, d\omega\, d\sigma\, dt \cos\theta$

C'est la quantité d'énergie contenue dans le volume élémentaire cylindrique de base $d\sigma' = d\sigma \cos\theta$ et de longueur c dt (si l'on suppose que la propagation s'effectue dans le vide où la vitesse de la lumière est égale à c). On a donc:



$dE_\nu = u_\nu(\vec{r}, \vec{\omega})\, d\nu\, d\omega\, dV$

où $dV = d\sigma' \times c \times dt$

d'où $dE_\nu = u_\nu(\vec{r}, \vec{\omega})\, d\nu\, d\omega\, d\sigma'\, c\, dt$

$\quad\quad = u_\nu(\vec{r}, \vec{\omega})\, d\nu\, d\omega\, d\sigma \cos\theta\, c\, dt$

et la relation:

$$\boxed{I_\nu(\vec{r},\vec{\omega}) = c\, u_\nu(\vec{r},\vec{\omega})}$$

Il en résulte la relation entre l'intensité spécifique du rayonnement et la densité globale d'énergie:

$$\int_{4\pi} I_\nu(\vec{r},\vec{\omega})\, d\omega = c\, u_\nu(\vec{r})$$

Dans le cas de la propagation dans un milieu matériel dispersif, c doit être remplacé par la vitesse de groupe, qui est celle à laquelle se propage l'énergie.

5- Intensité moyenne.

On définit l'intensité moyenne du rayonnement :

$$\bar{I}_\nu(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} I_\nu(\vec{r},\vec{\omega})\, d\omega$$

Il en résulte que:

$$4\pi\, \bar{I}_\nu(\vec{r}) = c\, u_\nu(\vec{r})$$

Dans le cas d'un champ de rayonnement isotrope:

$$\bar{I}_\nu(\vec{r}) = I_\nu(\vec{r},\vec{\omega}) = \frac{c}{4\pi}\, u_\nu(\vec{r})$$

II- INTERACTION DU RAYONNEMENT AVEC LA MATIERE.

Lorsqu'un faisceau lumineux traverse de la matière, il est altéré (à chaque fréquence) par les interactions qu'il subit avec cette matière. Ces interactions comprennent les absorptions et les émissions induites, qui ont pour effet de prélever ou d'injecter des photons lumineux dans la seule direction du faisceau, les émissions spontanées et les réémissions de toutes sortes qui contribuent à injecter des photons en partie seulement dans la direction du faisceau.

A chaque fréquence, on caractérise le premier processus (absorptions et émissions induites) comme une absorption (positive ou négative) subie par le faisceau incident. Le second processus résulte du bilan de toutes les réémissions. Celles-ci comprennent la réémission isotrope, sans changement de fréquence consécutive aux absorptions, le résultat de cascades radiatives consécutives à une absorption qui s'est produite à une autre fréquence ou la diffusion vraie.

On décrit globalement ces interactions, à une fréquence donnée ν, par un coefficient d'absorption Σ_ν (par cm^3) ou k_ν (par g) et un coefficient d'émission e_ν (par cm^3) ou j_ν (par g), définis de la façon suivante:

1- Coefficient d'émission.

La quantité d'énergie lumineuse à la fréquence (ν, $d\nu$) injectée dans la direction $\vec{\omega}$, dans l'angle solide $d\omega$ dans un volume dV pendant le temps dt est:

$dE_\nu = e_\nu \, d\nu \, dV \, d\omega \, dt = e_\nu \, d\nu \, d\sigma \, ds \, d\omega \, dt$ pour un volume de base $d\sigma$ perpendiculaire à $\vec{\omega}$ et de dimension ds dans la direction de $\vec{\omega}$.

On définit de la même façon le coefficient d'émission massique j_ν tel que :

$dE_\nu = j_\nu \, d\nu \, dm \, d\omega \, dt$

où dE_ν est la quantité d'énergie lumineuse à la fréquence $(\nu, d\nu)$, injectée dans la direction de $\vec{\omega}$ dans l'angle solide $d\omega$ dans un élément de masse dm pendant la durée dt. Il en résulte que si ρ est la masse volumique au voisinage du point P

$e_\nu = \rho \, j_\nu$

On voit donc que la variation dI_ν de l'intensité spécifique I_ν dans la direction $\vec{\omega}$ est :

$dI_\nu = dE_\nu / d\nu \, d\sigma \, d\omega \, dt = e_\nu \, ds$

2- Coefficient d'absorption.

Si l'intensité spécifique du rayonnement en un point P est

$I_\nu(\vec{r}, \vec{\omega}) = I_\nu(s, \theta, \varphi, \vec{\omega})$

au point voisin P' ($s+ds, \theta, \varphi$) où s est mesuré le long de la direction $\vec{\omega}$, l'intensité est devenue: $I_\nu + dI_\nu$, avec

$dI_\nu = -k_\nu \rho I_\nu ds$ (où $\rho(r)$ est la masse volumique au voisinage de P),

ou encore : $\boxed{dI_\nu = \Sigma_\nu I_\nu \, ds}$

où les facteurs de proportionnalité k_ν et Σ_ν sont des fonctions $k_\nu(\vec{r},\vec{\omega})$ et $\Sigma_\nu(\vec{r},\vec{\omega})$ de la position $\vec{r}$ et de la direction $\vec{\omega}$. Dans un milieu isotrope, k_ν et Σ_ν ne sont fonction que de $\vec{r}$. On les appelle respectivement le coefficient d'absorption massique et le coefficient d'absorption volumique.

On pose $\quad d\tau_\nu = k_\nu \rho ds = \Sigma_\nu ds$

d'où $\quad \tau_\nu = \int_{s_0}^{s_1} k_\nu \rho \, ds = \int_{s_0}^{s_1} \Sigma_\nu ds$

τ_ν est la profondeur optique correspondant à la traversée du milieu absorbant entre les points P_o $(s=s_o)$ et P_1 $(s=s_1)$.

Question T4

1- Montrer que dans un milieu purement absorbant l'intensité spécifique du rayonnement au point P_1 est

$$I_\nu(P_1) = I_\nu(P_o)\, e^{-\tau_\nu}$$

2- A quelle atténuation de l'intensité correspond la profondeur optique $\tau_\nu = 1$?

3- Relation entre les coefficients d'absorption et les paramètres microscopiques.

L'absorption provoquée par la matière sur un rayonnement de fréquence ν peut résulter de divers processus tels que:

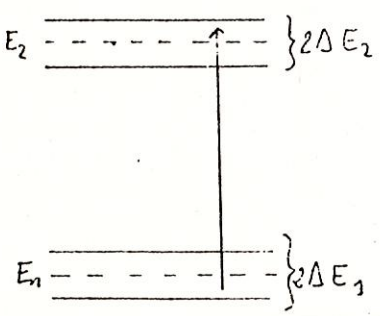
- l'absorption vraie, correspondant à l'excitation d'un atome de l'état n_1 à l'état n_2 tels que $E_{n_2} - E_{n_1} = h\nu$, ces états étant liés ou libres.
- l'émission induite correspondant à la desexcitation de l'état n_2 vers l'état n_1 sous l'action d'un photon $h\nu$.
- la diffusion, comme par exemple la diffusion Thomson ou la diffusion Compton.

Le cefficient d'absorption à la fréquence ν est la somme des coefficients d'absorption résultant de ces différents processus.

Nous nous contenterons ici d'évaluer le coefficient d'absorption dû aux états liés. Nous appellerons E_1 et E_2 les énergies "moyennés" du niveau inférieur n_1 et du niveau supérieur n_2 respectivement, chaque niveau ayant une certaine largeur ΔE_1 ou ΔE_2 liée à sa durée de vie finie.

Question T5.   Quelle est la largeur du niveau fondamental ?

Un atome dans l'état d'énergie E_1 est capable de prélever



les photons de fréquence voisine de la valeur ν telle que $E_2 - E_1 = h\nu$

Pour tenir compte de la largeur finie des niveaux, on décrit la probabilité d'absorption par le coefficient de probabilité $B_{12}\ \psi(\nu)$ où la fonction $\psi(\nu)$ est non nulle dans le domaine étroit de valeurs de ν telles que $h\nu$ soit égal à la différence d'énergie entre la valeur $E_2 + \delta E_2$, avec $\delta E_2 \leq \Delta E_2$, du niveau supérieur et la valeur $E_1 + \delta E_1$, avec $\delta E_1 \leq \Delta E_1$ du niveau inférieur; en outre $\psi(\nu)$ est normée:

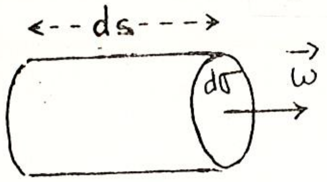
$$\int_{\Delta\nu} \psi(\nu)\, d\nu = 1$$

La fonction $\psi(\nu)$ décrit le profil de la raie . Le coefficient B_{12} caractérise la transition, il ne dépend pas de ν.

La quantité d'énergie lumineuse dE_ν de fréquence $(\nu, d\nu)$ se propageant dans la direction $(\vec{\omega}, d\omega)$, absorbée chaque seconde dans un volume de 1 cm^3 est donc égale à l'énergie $h\nu$ d'un photon multipliée par le nombre de photons absorbés : $N_1 B_{12}\ \psi(\nu) u_\nu(\vec{r},\vec{\omega}) d\nu\, d\omega = N_1 B_{12} \psi(\nu) \frac{I_\nu}{c} d\nu d\omega$

où N_1 est le nombre d'atome par cm^3 dans l'état n_1, soit:

$$dE_\nu = N_1 B_{12} \frac{h\nu}{c} \psi(\nu) I_\nu (\vec{r}, \vec{\omega})\, d\nu\, d\omega$$



Dans le volume $dV = d\sigma\, dS$, où $d\sigma$ est perpendiculaire à la direction $\vec{\omega}$, l'énergie absorbée est $d\sigma\, dS\, dE_\nu$. Il lui correspond une diminution d'intensité :

$$dI'_\nu = dE_\nu / d\sigma\, d\omega\, dS\, d\nu = N_1 B_{12} \psi(\nu) I_\nu h\nu/c$$

D'où la contribution au coefficient d'absorption Σ_ν due aux absorptions: $\Sigma'_\nu = N_1 B_{12} \frac{h\nu}{c} \psi(\nu)$

De la même façon, les émissions induites provoquent une "absorption négative" $dI''_\nu = - N_2 B_{21} \frac{h\nu}{c} \psi(\nu) I_\nu$

d'où la contribution au coefficient d'absorption :

$$\Sigma''_\nu = - N_2 B_{21} \frac{h\nu}{c} \psi(\nu) I_\nu$$

Compte-tenu de la relation entre entre B_{21} et B_{12} et de celle entre N_2 et N_1:

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21} \quad ; \quad N_2 / N_1 = (g_2 / g_1)\, e^{-h\nu/kT}$$

il vient:

$$\boxed{\Sigma_\nu = \Sigma'_\nu + \Sigma''_\nu = N_1 B_{12} \frac{h\nu}{c} \psi(\nu) \left(1 - e^{-h\nu/kT}\right)}$$

Question T5.

1- Comment s'écrit cette relation si le milieu n'est pas en équilibre thermodynamique local ?

2- Préciser dans quel cas la contribution des émissions induites à Σ_ν n'est pas négligeable.

On a de la même façon:

$$k_\nu = \frac{N_1 B_{12}}{\rho} \frac{h\nu}{c} \psi(\nu) \left(1 - e^{-h\nu/kT}\right)$$

4- Coefficient d'émission dans le cas de l'E.T.L. Loi de Kirchoff.

A l'équilibre thermodynamique, la microréversibilité de tous les processus implique que l'énergie prélevée : $\Sigma_\nu I_\nu\, ds\, d\sigma\, d\nu\, d\omega$

est égale à l'énergie émise: $dE_\nu = e_\nu \, d\nu \, dV \, d\omega$

d'où $e_\nu = \Sigma_\nu I_\nu$

Dans ce cas, I_ν est donné par la loi de Planck $I_\nu = B_\nu(T)$

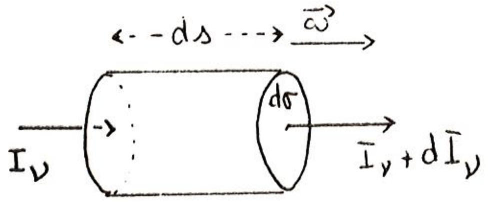
d'où: $\boxed{\begin{array}{l} e_\nu = \Sigma_\nu B_\nu(T) \\ \text{et } j_\nu = k_\nu B_\nu(T) \end{array}}$

Cette relation est connue sous le nom de "loi de Kirchoff": le rapport du coefficient d'émission au coefficient d'absorption de la matière placée dans un champ de rayonnement décrit par la loi du corps noir ne dépend que de la température de ce corps noir.

A l'équilibre thermodynamique local, (E.T.L.), la relation reste vérifiée, en raison de son caractère local.

III-EQUATION DE TRANSFERT DU RAYONNEMENT.

Considérons un volume élémentaire cylindrique de base $d\sigma$ et de longueur ds dans la direction $\vec{\omega}$. La quantité d'énergie lumineuse de fréquence $(\nu, d\nu)$ se propageant dans la direction $\vec{\omega}$ des génératrices du cylindre, dans l'angle solide $d\omega$, traversant la base du cylindre



d'abscisse s pendant dt est $I_\nu(\vec{r}, \vec{\omega}) \, d\sigma \, d\omega \, d\nu \, dt$

De même, la quantité d'énergie sortant du volume à l'abscisse s + ds est $(I_\nu + dI_\nu) \, d\sigma \, d\omega \, d\nu \, dt$, dans la même direction $\vec{\omega}$.

La variation $dI_\nu \, d\sigma \, d\omega \, d\nu \, dt$ de l'énergie lumineuse à la fréquence $(\nu, d\nu)$ dans la direction $(\vec{\omega}, d\omega)$, pendant l'intervalle de temps dt est dûe au bilan des émissions et des absorptions intervenant pendant dt dans le volume $d\sigma \, ds$.

Les absorptions provoquent une variation d'intensité:

$dI'_\nu = \Sigma_\nu I_\nu \, ds$ (diminution)

les émissions provoquent la variation:

$dI''_\nu = e_\nu \, ds$ (augmentation)

d'où : $dI_\nu = - dI'_\nu + dI''_\nu = (- \Sigma_\nu I_\nu + e_\nu) \, ds$

et $dI_\nu \, d\sigma \, d\omega \, d\nu \, dt = (- \Sigma_\nu I_\nu + e_\nu) \, d\sigma \, d\omega \, d\nu \, dt \, ds$

On peut donc écrire l'équation de transfert du rayonnement sous la forme:

$$\boxed{\frac{dI_\nu}{\Sigma_\nu ds} = \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = - I_\nu (s, \vec{\omega}) + S_\nu (s, \vec{\omega})}$$

avec $S_\nu = e_\nu / \Sigma_\nu$: S_ν est appelé "fonction source"

Remarquons que nous avons supposé le champ de rayonnement stationnaire. Si ce n'était pas le cas, il faudrait tenir compte de la variation de I_ν entre l'éntrée et la sortie du volume cylindrique due à la variation temporelle.

Remarquons aussi que la dérivée de I_ν par rapport à s (ou par rapport à τ_ν) doit être prise dans la direction $\vec{\omega}$.

Question T6.

Comment s'écrit l'équation de transfert à l'E.T.L. ?

IV- APPLICATION AUX ETOILES.

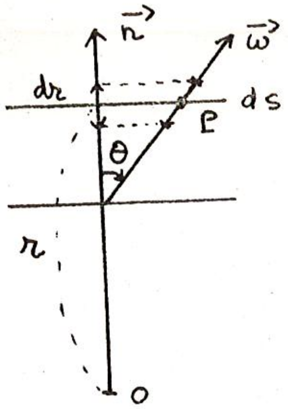
A l'intérieur des étoiles, on peut supposer avec une bonne approximation que l'équilibre thermodynamique local est réalisé, parceque le gradient de température n'est pas trop élevé. On peut également supposer, en général, que le champ de rayonnement est stationnaire. Cette dernière hypothèse tombe cependant en défaut dans le cas des étoiles variables.

L'équation de transfert que nous avons établie précédemment s'applique donc avec une fonction source $S_\nu(r)$ égale à la fonction de Planck $B_\nu(T)$ où T est la température du corps noir qui correspond à l'émissivitéau voisinage du point considéré, puisque l'E.T.L. implique la loi de Kirchoff. Par contre, en toute rigueur, l'E.T.L. n'entraine pas la relation:

$$u_\nu = (4\pi/c)\, B_\nu(T)$$

qui exprime que la densité d'énergie du rayonnement est égale à celle du corps noir. Cette condition n'est réalisée que si le coefficient d'absorption est suffisamment grand, ce qui est le cas à l'intérieur des étoiles. Nous adopterons donc également cette hypothèse.

Enfin, les étoiles présentant une configuration qui permet d'adopter une symétrie axiale pour le champ de rayonnement. Au voisinage d'un point donné de l'étoile, on peut assimiler l'étoile à une succession de couches plan-parallèles homogènes; le champ de rayonnement ne varie pas quand on considère des directions faisant le même angle θ avec la normale $\vec{n}$ aux plans des couches; il dépend donc seulement de l'angle θ et de la distance r mesurée dans la direction de la normale.



$$I_\nu(\vec{r},\vec{\omega}) = I_\nu(r,\theta)$$

$$u_\nu(\vec{r},\omega) = u_\nu(r,\theta)$$

$$\pi F_\nu(\vec{r},\vec{n}) = \pi F_\nu(r)$$

On utilise la variable $\mu = \cos\theta$

d'où $ds\cos\theta = dr = \mu\, ds$

L"équation de transfert s'écrit alors:

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial r} = -\Sigma_\nu I_\nu + \Sigma_\nu B_\nu$$

On multiplie chaque membre par $\mu\, d\omega$ et on intègre sur tout l'espace. On obtient:

$$\int_{4\pi} \mu^2 \frac{\partial I_\nu}{\partial r} d\omega = \int_{4\pi} -\Sigma_\nu I_\nu \mu\, d\omega + \int_{4\pi} \Sigma_\nu B_\nu \mu\, d\omega$$

avec $d\omega = 2\pi \sin\theta\, d\theta = -2\pi\, d\mu$, il vient:

$$\int_{-1}^{+1} \mu^2 \frac{\partial I_\nu}{\partial r} d\mu = \int_{-1}^{+1} -\Sigma_\nu I_\nu \mu\, d\mu + \int_{-1}^{+1} \Sigma_\nu B_\nu \mu\, d\mu$$

Le terme $B_\nu(T)$ est isotrope et l'intégrale correspondante est donc nulle.

Puisque $\pi F_\nu = \int_{-1}^{+1} 2\pi\, I_\nu \mu\, d\mu$, le terme $-\Sigma_\nu \int_{-1}^{+1} I_\nu \mu\, d\mu$ est égal à $-\Sigma_\nu \pi F_\nu (1/2\pi)$

Compte-tenu de: $I_\nu(r,\mu) = (c/4\pi)\, u_\nu(r)$, où $u_\nu(r)$ est la densité d'énergie globale, dans le cas d'un champ de rayonnement localement isotrope, le premier terme s'écrit:

$$(c/4\pi) \frac{\partial u_\nu}{\partial r} \int_{-1}^{+1} \mu^2 d\mu = \frac{c}{3\times 2\pi} \frac{\partial u_\nu}{\partial r}$$

d'où: $$\frac{c}{3\times 2\pi} \frac{\partial u_\nu}{\partial r} = -\Sigma_\nu \frac{\pi F_\nu(r)}{2\pi}$$ et :

$$\boxed{\pi F_\nu = -\frac{c}{3\Sigma_\nu} \frac{\partial u_\nu}{\partial r}}$$

Compte-tenu de l'approximation que nous avons faite, qui consiste à identifier le champ de rayonnement à celui d'un corps noir: $u_\nu = (4\pi/c)\, B_\nu(T)$

d'où: $$\frac{\partial u_\nu}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} \frac{dT}{dr} \frac{\partial B_\nu}{\partial T}$$

et $$\pi F_\nu = -\frac{4\pi}{3\Sigma_\nu} \frac{dT}{dr} \frac{\partial B_\nu}{\partial T}$$

Le flux net <u>intégré</u> est égal à :

$$\pi F = \int_{\nu=0}^{\infty} \pi F_\nu \, d\nu = -\frac{4\pi}{3} \frac{dT}{dr} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Sigma_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu$$

En général, on définit une valeur moyenne de $1/\Sigma_\nu$ égale à $1/\bar{\bar{\Sigma}}_R$ telle que :

$$\frac{1}{\bar{\bar{\Sigma}}_R} \int_0^{\infty} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu = \frac{1}{\bar{\bar{\Sigma}}_R} \frac{\partial B}{\partial T} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Sigma_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu$$

Compte-tenu de $B = \frac{\sigma}{\pi} T^4$, $\frac{\partial B}{\partial T} = \frac{4\sigma}{\pi} T^3$

et
$$\pi F(r) = -\frac{1}{\bar{\bar{\Sigma}}_R} \times \frac{4\pi}{3} \frac{dT}{dr} \times \frac{4\sigma}{\pi} T^3$$
$$= -\frac{16}{3} \frac{\sigma}{\bar{\bar{\Sigma}}_R} \frac{dT}{dr} T^3$$

$\bar{\Sigma}_R$ s'appelle <u>le « coefficient d'absorption de Rosseland ».</u>

Il résulte de cette relation que le débit d'énergie lumineuse à travers la sphère de rayon r est:

$$L_r = 4\pi r^2 \times \pi F = (64\pi/3)\, \sigma r^2 \frac{1}{\bar{\bar{\Sigma}}_R} T^3 \left(\frac{dT}{dr}\right)$$

que l'on écrit sous la forme:

$$\boxed{\frac{dT}{dr} = -\frac{3 L_r \Sigma_R}{16\pi a c r^2 T^3}}$$

compte-tenu de $a c = 4\sigma$.

On reviendra sur la forme de $\bar{\bar{\Sigma}}_R$ dans le cours de structure interne.