PRINCIPES PHYSIQUES

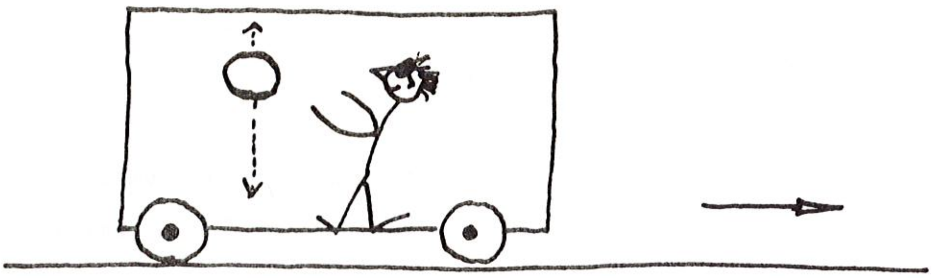
DE

LA RELATIVITE GENERALE

" Je commence à comprendre l'éternité... mais alors l'infinité - ça me dépasse complètement ! "

LA NOTION D'UNE TRANSFORMATION DE REPERE
ET LA RELATIVITE RESTREINTE

Considérons l'expérience élémentaire suivante :



Un garçon joue avec une balle sur un chariot fermé vitré, en mouvement uniforme rectiligne ; il lance la balle verticalement, en la laissant retomber librement.

Le mouvement de la balle peut être décrit de deux façons différentes selon si l'on est sur le chariot ou si on regarde d'un endroit au repos sur la rue.

Par rapport au chariot : le mouvement est vertical :

Par rapport à la rue : le mouvement est une sorte de cycloïde :

Comment concilier ces deux mouvements, apparemment si différents ?

Avant 1900 environ, le problème avait toujours été résolu par un raisonnement qui remonte essentiellement à Newton.

En effet, on suppose qu'un mouvement rectiligne uniforme ne peut avoir aucun effet sur les lois de la mécanique : toute différence de mouvement observé est due uniquement à une transformation des coordonnées du corps en mouvement d'un système de repère à un autre.

Cette notion amène à l'idée qu'aucun système repère en mouvement rectiligne uniforme n'est privilégié : de tels systèmes (appelés systèmes inertiels) sont tous équivalents et un mouvement exprimé dans un de ces systèmes peut être exprimé dans un autre grâce à une loi de transformation :

$$v_1 = v_2 + v_{12}$$
$$x_1 = x_2 + v_{12}t$$
$$t_1 = t_2$$

où : v_1 = vitesse mesurée dans le système de repère 1 ;
v_2 = vitesse mesurée dans le système de repère 2 ;
v_{12} = vitesse relative du système 1 par rapport au système 2 ;
t = temps.

Pour simplifier la notation, on a choisi un mouvement de long de l'axe x ; un mouvement tri-dimensionnel s'exprime de façon semblable.

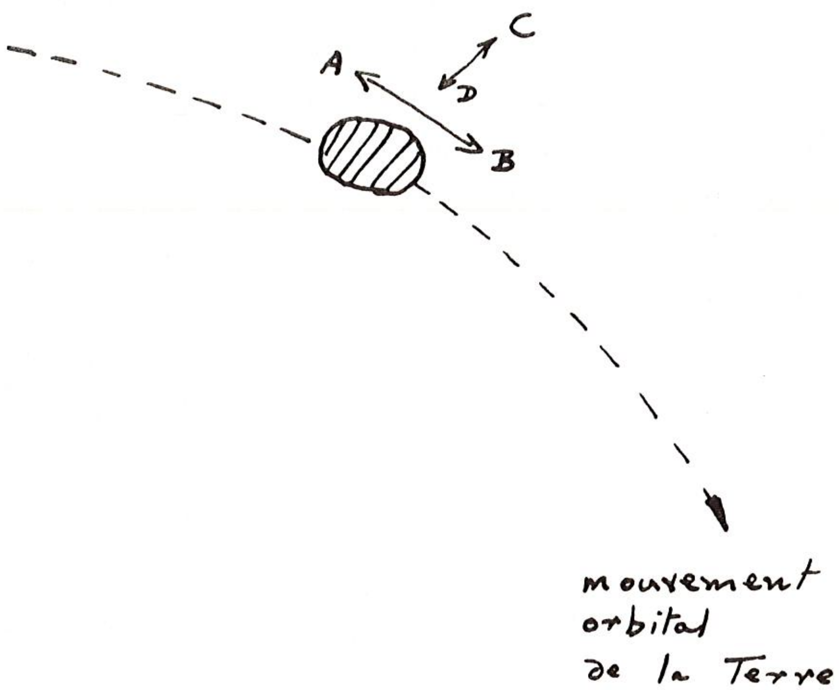
On remarque une hypothèse sous-entendue : le temps ne se transforme pas, ce qui revient à supposer que l'on puisse définir une séquence temporelle absolue, indépendante du système de repère. Dans l'esprit Newtonien, les coordonnées spatiales (X,Y,Z,vitesse) sont relatives mais le temps est absolu. La transformation qui lie deux systèmes inertiels est appelée une transformation galiléenne.

Donc dans l'esprit Newtonien, les lois de la mécanique sont <u>invariantes</u> (c'est-à-dire gardent leur forme) par rapport aux transformations galiléennes.

Dans cette description de la nature, les lois de la mécanique ne gardent pas leur forme sous une transformation non-inertielle (c'est-à-dire, à un système de repère accéléré, en rotation...) ; on voit apparaître des quantités supplémentaires, qui jouent le rôle de forces (par exemple, la force de Coriolis, qui apparaît dans des systèmes en rotation). Dans la physique "pré-Einsteinienne", on a toujours considéré ces "forces" comme "fictives" et en quelque sorte "louches" -on les utilisait par commodité de calcul, mais en gardant à l'esprit leur nature "imaginaire".

Le 19e siècle a assité au développement de la théorie électromagnétique de Maxwell : les équations de Maxwell ont amené les physiciens à identifier la lumière avec la propagation des ondes électromagnétiques dans un "aether" ayant des propriétés subtiles (soutient la propagation des ondes, mais ne freine pas le mouvement orbital de la Terre, par exemple).

La propagation des ondes électromagnétiques était considérée comme l'analogue de la propagation des ondes mécaniques dans les milieux connus, comme l'eau ou l'air. Or, dans ces cas, la vitesse de propagation est fonction de la vitesse de la source par rapport au milieu ; par conséquent, la vitesse de propagation de la lumière aurait dû être fonction de la vitesse d'une source lumineuse. On devrait donc pouvoir mesurer la vitesse de la Terre par rapport à "l'aether" en mesurant la vitesse de propagation de la lumière dans les deux directions perpendiculaires AB, CD :



L'expérience a été réalisée par Michelson à l'aide d'un interféromètre : aucune différence de vitesse n'a été détectée, ni par Michelson ni par ses successeurs du 20e siècle. Le résultat avait aussi été confirmé par des observations astronomiques : par exemple en étudiant les mouvements apparents des étoiles binaires.

Les physiciens du 19e siècle (Lorenz, par exemple) ont tenté d'expliquer ce résultat en supposant que la matière se déforme dans la direction de la vitesse : ainsi les bras perpendiculaires de l'interféromètre subissent des changements de longueurs inégaux. Dans l'esprit du 19e siècle, ces changements étaient réels, et Lorenz a essayé de démontrer leur existence théoriquement à l'aide de la théorie électromagnétique de la matière : les résultats n'étaient pas concluants.

C'est au début du 20e siècle que Einstein développe une nouvelle théorie, que nous pouvons résumer a postériori de la façon suivante : toute loi de physique digne du nom doit être invariante par rapport à une transformation entre systèmes inertielles. Cette expression n'est qu'une généralisation, au domaine de la physique, de l'idée de Newton qui se rapportait au seul domaine de la mécanique.

On remarque immédiatement que les équations de Maxwell ne sont pas invariantes par rapport aux transformations galiléennes -leur forme même change. Si l'on veut considérer les équations de Maxwell comme lois fondamentales, on ne peut pas considérer comme telles les transformations galiléennes, malgré leur appel intuitif : il en faut trouver d'autres.

La transformation qui restitue la forme des équations de Maxwell est celle de Lorentz :

$$v_1 = (v_2 + V_{12}) / \left[1 + \frac{v_2 V_{12}}{c^2}\right]$$

$$x_1 = (x_2 + V_{12} t_2) / \left[1 - \frac{V_{12}^2}{c^2}\right]^{1/2}$$

$$t_1 = (t_2 + V_{12} x_2 / c^2) / \left[1 - \frac{V_{12}^2}{c^2}\right]^{1/2}$$

où : c = vitesse de la lumière dans le vide.

On remarque que, avec cette transformation :

- la vitesse de la lumière est c dans le vide, quel que soit le système de repère :

$$V_1 = (c + V_{12}) / \left[1 + \frac{c V_{12}}{c^2}\right] = c$$

- les trajets des rayons lumineux sont droits ;
- on retrouve les transformations galiléennes pour $v_{12} \ll c$;
- le temps n'est plus une quantité "absolue", mais varie selon le système des repères. Ce phénomène paraît, au premier abord, incompréhensible.

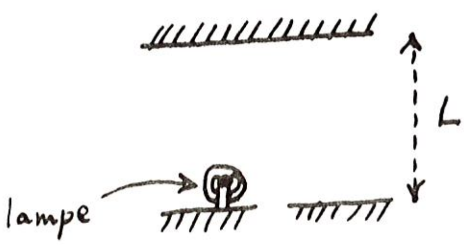
Ces propriétés des équations de Maxwell envers la transformation de Lorenz étaient déjà connues au 19e siècle, mais on ne comprenait pas leur importance fondamentale ; c'est Einstein, à l'aide d'une analyse profonde de la notion de mesure, qui a donné un sens physique à la transformation de Lorentz.

Einstein a commencé avec deux idées maîtresses.

D'une part, les expériences de Michelson ont montré que la vitesse de la lumière est une constante dans le vide, quelle que soit la vitesse de la source. Sans chercher à comprendre la raison aux termes de la physique du 19e siècle, on peut considérer cet effet comme une propriété essentielle de la lumière.

D'autre part, les lois de physique ne doivent pas être fonction du système de repère utilisé pour les exprimer -un système de repère étant en fin de compte un ensemble d'"étiquettes" arbitraires, les propriétés essentielles du monde ne devraient pas y être fonction. En particulier, les instruments utilisés pour effectuer les mesures de temps, longueur, etc..., se comportent de la même façon, quel que soit le système des repères. Une conséquence importante est la possibilité (théorique) de construire un ensemble d'horloges identiques, qui marchent à la même vitesse dans un même système de repère et qui ne changent pas leur fonctionnement quand elles sont mises en mouvement.

Le sens fondamental de la transformation de temps peut maintenant être illustré en construisant une horloge très particulière.



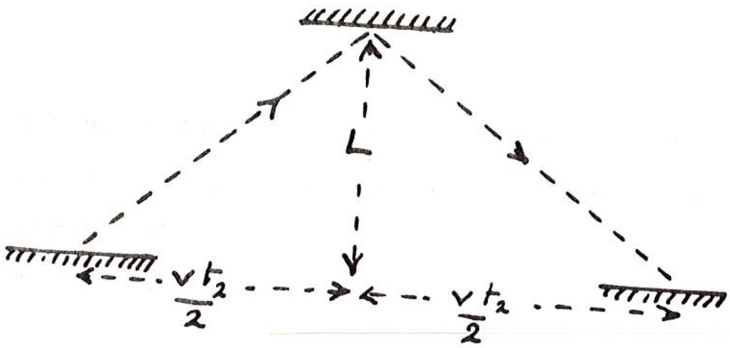
Elle est composée de deux miroirs, séparés d'une distance L, les deux surfaces réfléchissantes étant dirigées l'une vers l'autre. Un de ces miroirs a un petit trou ; une lampe est placée sur ce miroir à l'intérieur de l'ensemble.

La lampe est allumée pendant un intervalle de temps très court : ainsi, une "pulsation" de lumière passe d'un miroir à l'autre. Un expérimentateur qui observe le trou verra un clignotement chaque fois que la lumière renvoyée sort du trou -nous avons donc construit une horloge à battement régulier ; de plus, nous pouvons en construire plusieurs exemplaires identiques pour pouvoir les comparer sous différentes conditions.

Considérons d'abord un expérimentateur au repos par rapport à l'appareil. Il verra une pulsation de lumière à des intervalles de temps $t_1 = 2L/c$, c étant la vitesse de lumière dans le vide. L'unité de mesure de temps est donc, pour cet observateur, 2L/c.

Considérons maintenant le même expérimentateur, équipé de la même horloge, qui observe une horloge identique animée d'une vitesse v. Quelle période de battement observera-t-il ?

On remarque que le parcours lumineux dans l'horloge mobile est, pour l'expérimentateur, un zigzag :



Si la période du battement observée est t_2, l'ensemble se déplace d'une distance vt_2 entre deux battements. Par conséquent, la longueur du parcours lumineux est donnée par :

$$2\left[L^2 + \frac{v^2 t_2^2}{4}\right]^{1/2}$$

Selon l'expérience de Michelson, et l'hypothèse fondamentale d'Einstein, la vitesse de lumière est toujours égale à c. Par conséquent, le temps de parcours est donné par :

$$2\left[L^2 + \frac{v^2 t_2^2}{4}\right]^{1/2} / c$$

Donc :

$$t_2 = 2\left[L^2 + \frac{v^2 t_2^2}{4}\right]^{1/2} / c$$

d'où :

$$t_2^2 = 4\left[L^2 + \frac{v^2 t_2^2}{4}\right] / c^2$$

Donc :

$$t_2 = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{[1 - v^2/c^2]^{1/2}}$$

$$= \frac{t_1}{[1 - v^2/c^2]^{1/2}}$$

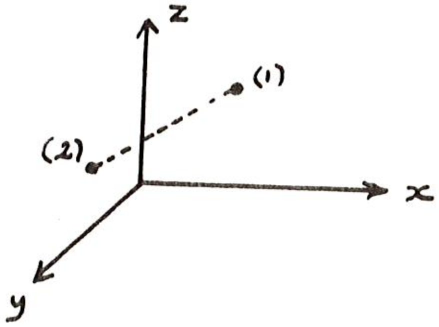
On retrouve ainsi un cas particulier de la transformation de Lorentz.

Cet exemple nous montre qu'il n'y a aucun sens à parler d'un temps dans l'absolu ; le temps est une quantité mesurée, et la mesure implique une comparaison faite à l'aide des rayons électromagnétiques : le résultat de la comparaison est fonction des conditions de l'expérience. Nous ne pouvons pas non plus accorder une valeur privilégiée à l'expérimentateur au "repos"; tout système inertiel est équivalent en ce qui concerne les lois de la physique -nous pouvons seulement affirmer que telle mesure, faite sous telles conditions, donne tel résultat.

Nous avons illustré le sens physique de la transformation de Lorentz à l'aide d'une réalisation particulière d'une horloge ; on montre que le résultat ne dépend pas de la réalisation et s'applique à toute mesure physique, étant en dernier ressort une conséquence de la notion de ce qui peut constituer une loi de la physique (quelque chose qui ne change pas sa forme par rapport au système de repère), de la constance de la vitesse des ondes électromagnétiques (expérience de Michelson), et du fait que les mesures et observations sont faites à l'aide des ondes électromagnétiques.

C'est la base physique de la relativité restreinte.

Du point de vue mathématique, il est commode de généraliser la notion de "distance entre deux points".



Dans un espace Cartésien tri-dimensionnel, la distance S entre deux points (1) et (2) est donnée par le théorème de Pythagore :

$$S^2 = (X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2$$

Cette distance est une <u>invariante</u> géométrique par rapport à toute rotation et translation du système de repère.

Considérons maintenant un espace mathématique quadridimensionnel, formé des trois composantes X,Y,Z et une composante que l'on écrira ict, t étant un "axe" de repère temporel.

Par analogie avec le théorème de Pythagore, définissons une quantité S :

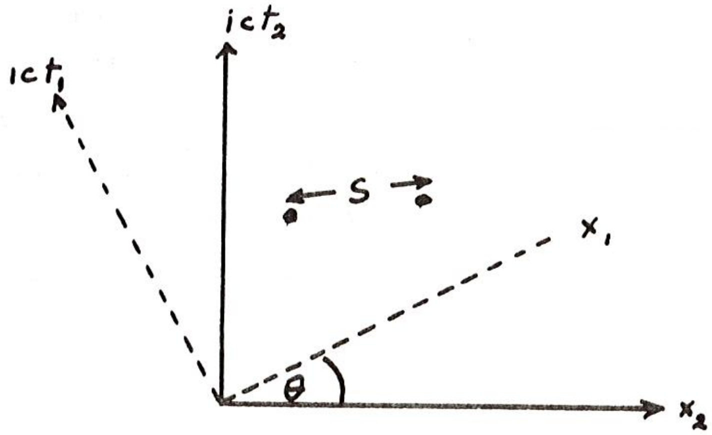
$$s^2 = [ic(t_1-t_2)]^2 + (x_1-x_2)^2 + \cdots$$

$$= -c^2(t_1-t_2)^2 + (x_1-x_2)^2 + \cdots$$

On l'appelle "un intervalle de longueur" :

- elle a le sens habituel de distance pour deux événements simultanés
- un parcours lumineux $\left(\frac{x_1-x_2}{t_1-t_2} = c\right)$ est défini par $S^2 = 0$.

Considérons maintenant une rotation de ce système de coordonnées d'un angle θ :



$$ict_1 = ict_2 \cos\theta + x_2 \sin\theta$$

$$X_1 = -ict_2 \sin\theta + x_2 \cos\theta$$

avec des relations semblables pour y et z.

Une telle rotation ne peut pas changer la valeur de S^2 ; de plus, on remarque que si l'on met :

$$\cos\theta = \left[1 - v_{12}^2/c^2\right]^{1/2}$$

$$\sin\theta = -i\frac{v}{c}\cos\theta$$

la rotation dans l'espace quadridimensionnel a la forme de la transformation de Lorentz.

Par conséquent la relativité restreinte peut être considérée de la façon suivante :

Les lois de la physique sont invariantes par rapport aux rotations dans un espace 4-dimensionnel défini par les axes (ict,x,y,z) ; les rotations correspondant mathématiquement aux transformations entre des systèmes de repère inertiels. Une seule quantité est conservée pendant les rotations ; c'est l'intervalle de longueur S.

Cette expression de la relativité restreinte a été développée par Minkowski. Elle est très commode pour la réalisation des calculs, mais, avant la relativité générale, ne semblait pas avoir une signification physique particulière.

Signalons ici un problème de notation.

Dans la géométrie tri-dimensionelle, on <u>définit</u> un vecteur $\underline{u}_3$ tridimensionelle par les trois composantes (x, y, z), et sa longueur s par le produit scaleur $\underline{u}_3 . \underline{u}_3$:

$$s^2 = \underline{u}_3 . \underline{u}_3 = x^2 + y^2 + z^2$$

Ainsi on restitue le théorème de Pythagore.

Si l'on veut maintenant inclure une composante temporelle, il faut <u>définir</u> un quadrivecteur et la forme de son produit scaleur, mais ces définitions <u>ne sont pas données a priori</u>: elles doivent seulement restituer la forme de la transformation de Lorenz. En effet, cette condition est vérifiée si la "lognueur" d'un quadrivecteur est donnée par une expression ayant la forme:

$$s^2 = \mp c^2t^2 \pm (x^2 + y^2 + z^2)$$

Pour la transformation de Lorenz, le signe de la "longueur" n'a pas d'importance - il est essentiel seulement que le signe ...

temporelle du produit scaleur soit opposée au signe de la partie spatiale. On dispose de deux moyens au moins d'arranger la chose.

1) On peut généraliser la définition tridimensionelle du produit scaleur aux vecteurs quadridimensionelles $\underline{u}_4$:

$$\underline{u}_4 = (T, \underline{u}_3)$$

et par analogie avec le cas tri-dimensionelle:

$$\underline{u}_4 \cdot \underline{u}_4 = T^2 + \underline{u}_3 \cdot \underline{u}_3 = T^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

Dans ce cas, la quatrième composante T prend nécessairement la forme complexe:

$$T = ict$$

C'est la démarche suivie par Minkowski et plusieurs relativistes depuis; elle a l'avantage de garder la définition habituelle du produit scaleur, mais au prix d'apparition d'une composante temporelle complexe.

2) On peut définir le produit scaleur d'un quadrivecteur $\underline{u}_4 = (T, \underline{u}_3)$ par l'expression:

$$\underline{u}_4 \cdot \underline{u}_4 = T^2 - \underline{u}_3 \cdot \underline{u}_3 = T^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

Dans ce cas, la quatrième composante prend la forme réelle:

$$T = ct$$

C'est la démarche suivie par beaucoup de relativistes modernes - elle se revèle plus commode en pratique à cause de la nature réelle de la composante temporelle. Il faut seulement garder à l'esprit la nouvelle définition du produit scaleur d'un quadrivecteur.

Toutefois, il n'y a pas de notation conventionnée: parfois le même auteur change sa convention au milieu de son ouvrage. Ce n'est pas grave, à condition d'utiliser la même convention pour un calcul conné. On appelle souvent la convention "la signature": elle est exprimée sous forme des signes des coefficients dans l'expression pour s^2 : on a ainsi

- signature (-+++) ce qui correspond aux quadrivecteurs (ict, x, y, z), avec le produit scaleur "classique".
- signature (+---) ce qui correspond aux quadrivecteurs (ct, x, y, z), avec le produit scaleur $c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$.

Dans la suite, nous alons utiliser la signature (+,-,-,-), ce qui correspond à la convention trouvée dans plusieurs ouvrages récents.

LE PRINCIPE DE LA RELATIVITE GENERALE

Jusqu'à présent, nous nous sommes bornés aux problèmes soulevés par des transformations entre repères inertiels.

Cette restriction avait un certain sens dans le contexte de la mécanique Newtonienne, où le temps jouait un rôle privilégié, étant absolu, et où l'on n'avait pas encore bien dégagé les notions importantes d'une loi de physique et de mesure. Les repères inertiels étaient admis comme privilégiés, étant ceux où les lois de mouvement de Newton sont vérifiées ; pour traiter le cas de repère non-inertiel, les lois de mouvement sont "modifiées" par l'introduction de "forces fictives", ou d'autres procédés analogues.

Or, la relativité restreinte avait soulevé une nouvelle notion : un système de repère n'est qu'une façon conventionnelle de donner des "étiquettes", quelle que soit leur nature ; pourquoi donc privilégier comme on fait dans la relativité restreinte, les repères inertiels ?

Ces réflexions ont amené Einstein à énoncer le principe de la relativité générale : les lois de la physique doivent être invariantes par rapport à une transformation à un système de repère quelconque, y compris les systèmes non-inertiels.

Ce principe soulève immédiatement un problème général : les lois de physique, exprimées de façon traditionnelle à l'aide des coordonnées cartésiennes ou "Minkowskiennes" ne sont pas invariantes à des transformations arbitraires. Il faut par conséquent trouver une façon plus générale d'exprimer les lois de physique.

La gravitation pose un problème particulier.

Newton avait défini la force comme une quantité qui engendre une accélération :

$$F_I \propto \gamma$$

où :

F_I est la force

γ est l'accélération.

La constante de proportionalité est la masse m_I du corps sur lequel agit la force :

$$F_I = m_I \gamma$$

On appelle cette masse la masse inertielle.

Par ailleurs, empiriquement, deux corps s'attirent mutuellement : on "explique" cette attraction par la présence d'une "force gravitationnelle" F_G, dont la valeur est proportionnelle aux masses des corps :

$$F_G \propto m_G M_G$$

où : m_G, M_G sont les masses des corps.

A priori, la masse qui intervient dans la loi de gravitation, m_G, n'a aucun rapport avec la masse m_I qui intervient dans la loi de mouvement. Newton a supposé que :

$$m_I = m_G$$

et des expériences du type Eötvös ont pleinement vérifié cette hypothèse.

- Dans la mécanique Newtonienne, aucune explication n'est donnée pour ce hasard ; c'est un fait d'expérience...et voilà tout ;
- la force de gravitation est de nature mystérieuse : elle agit à distance, à travers le vide, etc...

L'égalité de la masse inertielle et de la masse gravitationnelle conduit à un autre problème...tout au moins, dans le contexte du principe de la relativité générale.

Considérons, avec Einstein, un physicien enfermé dans une boîte sans fenêtre. La boîte est équipée de tous les appareils de mesure qu'on veut -par exemple une balance à ressort à laquelle on suspend une masse. On réalise maintenant deux expériences de pensée.

1) La boîte est placée dans le voisinage d'un corps massif. Le physicien observe alors une extension de la balance ;
2) on place la boîte loin de tout corps et on lui donne une accélération uniforme. Le physicien observe alors une extension de sa balance.

On remarque que, à cause de $m_I = m_G$, le physicien est incapable de distinguer les deux cas : qu'il soit dans un champ gravitationnel ou qu'il soit accéléré, la balance se comporte de la même façon. L'expérience de pensée peut être généralisée et on montre qu'aucune mesure ne peut distinguer l'effet sur un corps d'un champ gravitationnel d'une accélération uniforme -un champ gravitationnel est strictement équivalent à une accélération.

Considérons maintenant le même arrangement, la boîte étant animée d'une accélération uniforme.

A un moment donné, une lampe s'allume et le physicien mesure le parcours du rayon lumineux. La trajectoire sera courbée à cause de l'accélération : les rayons lumineux ne sont rectilignes que dans les systèmes inertiels. Mais nous avons vu qu'un champ gravitationnel et une accélération sont équivalents, du point de vue des mesures physiques ; par conséquent la trajectoire d'un rayon lumineux sera courbé <u>aussi</u> dans un champ gravitationnel.

Voici alors un résultat ennuyeux : la relativité restreinte n'est pas valable dans un champ gravitationnel, car celui-ci a toutes les caractéristiques d'un système de repère non-inertiel.

Faut-il avoir plusieurs sortes de physique, selon les champs de force, système de repère...?

Peut-on trouver des propriétés du monde qui sont indépendantes des conventions arbitraires liées aux systèmes des repères ?

GAUSS ET LES PROPRIETES GEOMETRIQUES "INTRINSEQUES" DES SURFACES

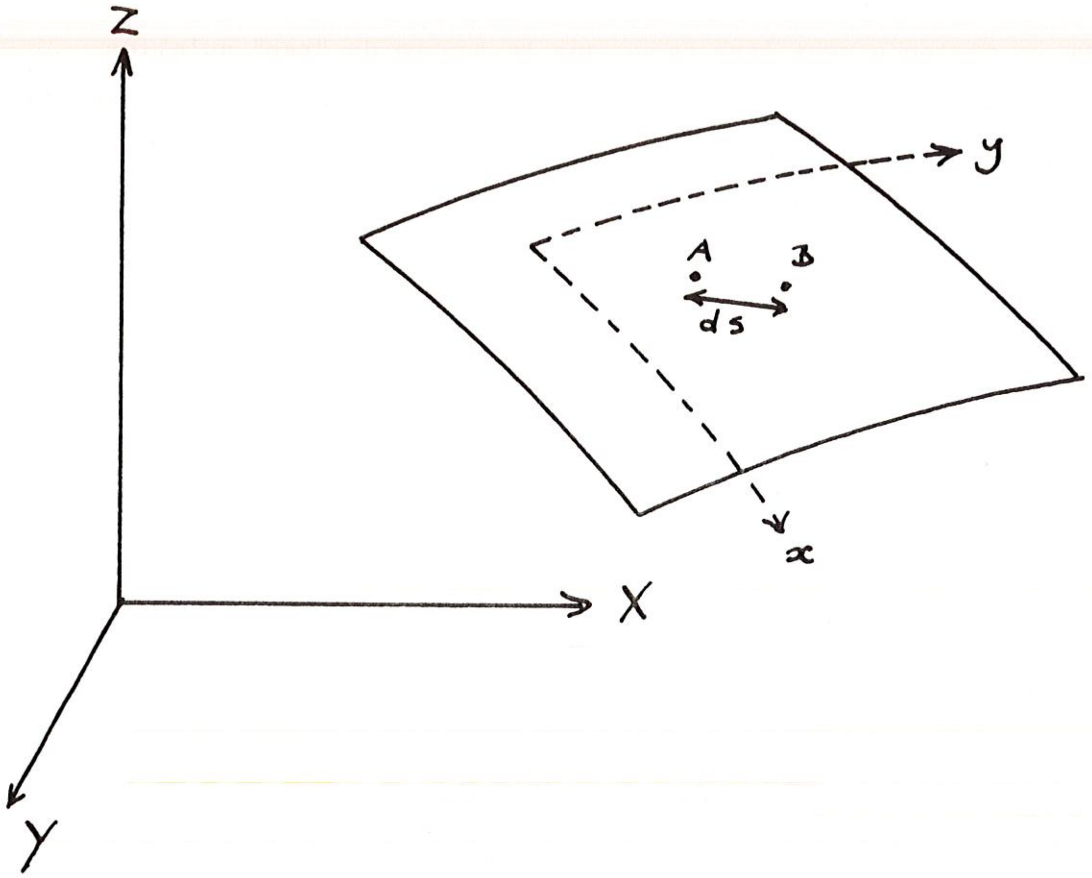
Jusqu'au 18e siècle, la seule géométrie "admise" fut celle basée sur les postulats d'Euclide, dont, par exemple, le postulat des parallèles est célèbre.

Le postulat des parallèles a joué un rôle critique dans la géométrie. Plusieurs générations de mathématiciens depuis Euclide en avaient cherché une preuve rigoureuse, sans aucun succès : pourtant la géométrie semblait impensable sans ce postulat. C'est vers la fin du 18e siècle que Bolyai et Lobachevsky démontrent que le postulat n'est pas nécessaire : on peut en effet construire des géométries cohérentes et consistantes (c'est-à-dire sans contradictions internes) sans poser le postulat des parallèles. Donc, qu'on admette ou pas le postulat des parallèles n'est plus une affaire des mathématiciens : seule l'expérience peut trancher entre la géométrie euclidienne et les autres.

La géométrie euclidienne, soit sous forme purement géométrique, soit sous la forme algébrique développée par Descartes, est une géométrie plane ; les propriétés géométriques de la surface d'une sphère furent toujours étudiées par l'intermédiaire de la géométrie plane euclidienne. Par exemple, il était bien connu que la somme des angles d'un triangle dessiné sur la surface d'une sphère est supérieure à 180° et que des "parallèles" (des grands cercles) se rencontrent à une distance finie (aux pôles) ; toutefois aucun progrès ne pouvait être fait tant que la sphère était étudiée comme un objet à l'intérieur d'un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires ; c'est-à-dire tant que l'on étudiait la sphère du point de vue d'un observateur placé à l'extérieur.

C'est Gauss qui se proposait d'étudier les propriétés géométriques d'une surface arbitraire à l'aide d'un système de coordonnées lié à la surface elle-même : c'est-à-dire les "axes" du système des coordonnées "épousent" la surface et la suivent. On appelle un tel système de coordonnées "curviligne" : les axes ne sont plus, en général, rectangulaires.

Considérons un morceau élémentaire d'une surface, et dressons sur cette surface deux axes x et y qui suivent sa forme. Quelle est la distance ds entre deux points voisins (dans le sens du calcul différentiel) A et B ?



La distance eput être exprimée de deux façons différentes, selon le système de coordonnées utilisées.

1) a l'aide d'un système cartésien rectangulaire traditionnel X,Y,Z

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$$

2) à l'aide des coordonnées curvilignes x,y :

$$ds^2 = \alpha\, dx^2 + \beta\, dy^2 + \gamma\, dx\, dy$$

Dans ce cas, on voit apparaître des coefficients α, β, γ dont les valeurs dépendent de la forme de la surface :

$\alpha = \beta = 1 ; \gamma = 0 ; \Rightarrow$ surface plane : géométrie euclidienne

$\alpha \neq \beta ; \gamma \neq 0 ; \Rightarrow$ surface courbe, géométrie non-euclidienne.

Or les seules coordonnées "accessibles" aux êtres vivant sur la surface et incapables de se mettre à l'extérieur (par exemple une race de fourmis intelligentes !) sont les coordonnées curvilignes x,y ; par exemple, leur mesure de distance peut être basée sur le nombre de "pas" qu'elles font dans une direction donnée. Ces fourmis pourraient trouver expérimentalement la relation entre ds et x,y : elles pourraient alors déterminer les valeurs des coefficients α, β, γ et donc la forme géométrique de leur monde.

On voit apparaître une méthode pour tester les postulats de Euclide à l'échelle locale.

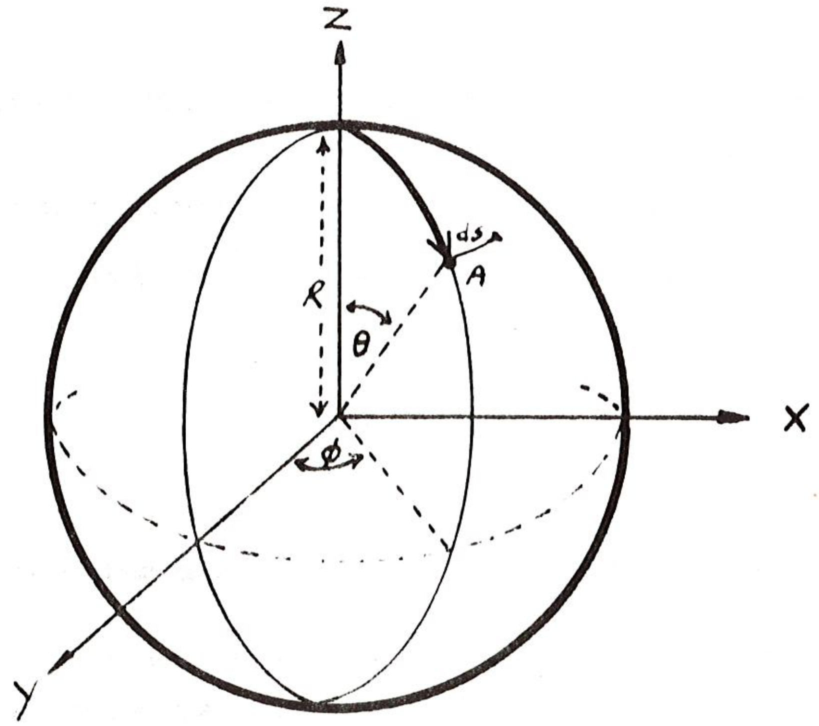
Considérons une séparation infinitésimale ds ; étant infinitésimale, elle aura la même valeur quel que soit le système de coordonnées utilisé pour l'exprimer. Par ailleurs, on passe du système rectangulaire X,Y,Z au système curviligne x,y à l'aide de la transformation :

$$dX = \frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy$$

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy$$

$$dZ \quad \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy$$

Considérons une sphère, de rayon R, et un élément de longueur ds.

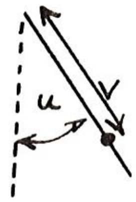


Les coordonnées cartésiennes d'un point A sur la surface sont données par :

$$X = R \sin\theta \sin\phi$$
$$Y = R \sin\theta \cos\phi$$
$$Z = R \cos\theta$$

Sur la surface de la sphère, les coordonnées de A peuvent être, par exemple :

$$u = R\theta$$



$$v = \phi$$

Ce sont en quelque sorte des coordonnées polaires curvilignes.

On a :

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$$

Si l'on exprime dX, dY, dZ en fonction de $d\theta, d\phi$ on trouve :

$$ds^2 = \left[R\cos\theta \sin\phi \, d\theta + R\sin\theta \cos\phi \, d\phi\right]^2$$
$$+ \left[R\cos\theta \cos\phi \, d\theta - R\sin\theta \sin\phi \, d\phi\right]^2$$
$$+ R^2 \sin^2\theta \, (d\theta)^2$$

$$= R^2 (d\theta)^2 + R^2 \sin^2\theta \, (d\phi)^2$$

En termes des coordonnées curvulignes, ds^2 devient :

$$ds^2 = du^2 + R^2 \sin^2\left(\frac{u}{R}\right) dV^2$$

Donc, une succession de mesures de ds^2 en fonction de u,V faites sur la surface de la sphère donne la valeur de la courbure : 1/R.

On remarque que pour $R \to \infty$,

$$ds^2 \to du^2 + u^2 dV^2$$

ce qui est la forme qui correspond à un plan euclidien.

Appliquons maintenant la transformation suivante :

$$V = V$$

$$r = R \sin\left(\frac{u}{R}\right)$$

On a alors :

$$dr = \cos\left(\frac{u}{R}\right) du$$

$$= \left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]^{1/2} du$$

Par conséquent, en termes de r, V, ds^2 s'écrit :

$$ds^2 = \frac{dr^2}{\left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]^{1/2}} + r^2 dV^2$$

La forme de ds^2 est maintenant différente ; toutefois cette forme relève toujours des propriétés géométriques d'une surface ayant la courbure 1/R.

Revenons aux expériences métrologiques des fourmis. Dans une fourmilière, on décide d'utiliser un certain système de repère u,V ; en mesurant les séparations entre deux points, ces fourmis trouvent que :

$$ds^2 = du^2 + R^2 \sin^2\left(\frac{u}{R}\right) dv^2$$

Pourtant, dans une autre fourmilière, on choisit un autre système de repère p,q ; ces fourmis trouvent que :

$$ds^2 = \frac{dp^2}{\left[1 - \frac{p^2}{R^2}\right]^{1/2}} + p^2 dq^2$$

Comment trancher qui a raison ?

En fait, ces deux formes sont équivalentes : on peut passer de l'une à l'autre par une transformation qui garde le même nombre "d'axes", et chaque forme est un conséquence des propriétés géométriques d'une surface sphérique ayant courbure (1/R).

Cet exemple presque trivial éclaircit la grande découverte de Gauss. En effet, une surface quelconque possède certaines propriétés géométriques qui peuvent être <u>découvertes empiriquement</u> à l'aide des mesures <u>faites sur la surface elle-même</u>.

Bien sûr, pour effectuer ces mesures, il faut établir, sur la surface, un système de repère ; les propriétés géométriques dont il est question sont implicites dans l'expression de ds^2 en fonction des coordonnées, <u>mais elles sont indépendantes</u> du système de repère choisi : pour une même surface, il existe plusieurs formes pour ds^2, mais on passe de l'une à l'autre à l'aide d'une transformation qui garde le même nombre "d'axes".

On appelle les propriétés géométriques qui peuvent être ainsi établies "les propriétés intrinsèques" : la courbure d'une sphère en est une.

Les <u>propriétés intrinsèques</u> d'une surface sont <u>invariantes</u> par rapport à une <u>transformation de repère</u>, à condition que le nouveau système soit toujours lié à la surface.

Remarquons que les propriétés intrinsèques n'ont pas nécessairement une interprétation intuitive : nos fourmis, n'ayant jamais quitté leur monde, n'ont aucune notion de "courbure de surface" ; de leur point de vue, il intervient dans la relation pour ds^2 (quel que soit le système de repère) un paramètre $1/R$ qui fixe entièrement les propriétés géométriques de leur monde.

Ainsi, on voit prendre naissance déjà dans le travail de Gauss la solution au problème que s'est posé Einstein un siècle et demi plus tard ; Gauss a trouvé que certaines propriétés géométriques sont indépendantes du système de repère (quel qu'il soit) et Einstein cherchait à formuler les lois de la physique de façon à être invariantes par rapport à tout système de repère, qu'il soit inertiel ou non.

INTERVALLE DE LONGUEUR , LA METRIQUE ET C°

Il est commode pour la suite, et aussi pour la compréhension des ouvrages spécialisés, de résumer les découvertes de Gauss en se servant du "jargon" moderne.

Intervalle de longueur,: la distance infinitésimale ds^2 entre deux points sur la surface.

La métrique : la relation entre ds^2 et les coordonnées curvilignes (u,v) établies sur la surface.

En général :

$$ds^2 = \alpha\, du^2 + \beta\, dv^2 + \gamma\, du\, dv$$

Coefficients de la métrique : les coefficients α, β, γ. Dans l'ensemble, ces coefficients nous donnent toutes les propriétés géométriques intrinsèques d'une surface, c'ést-à-dire, tout ce qu'on peut découvrir par des mesures effectuées sur la surface seulement.

La métrique d'une surface est invariante par rapport à une transformation de repère sur la surface -seuls les coefficients changent, selon le système de repère utilisé.

Inversement, si l'on ne peut pas passer d'une expression pour ds^2 à une autre à l'aide d'une transformation sur la surface, les deux expressions relèvent de deux surfaces intrinsèquement différentes.

Quelques exemples des métriques :

1) Métrique Euclidienne : en deux dimensions :

(a) $ds^2 = dx^2 + dy^2$ en coordonnées cartésiennes

(b) $ds^2 = dr^2 + r^2 (d\varphi)^2$ en coordonnées polaires

On remarque que les coefficients de la métrique changent selon les coordonnées utilisées, mais que les propriétés intrinsèques -géométrie euclidienne plane, rayon de courbure en sont indépendantes.

2) Métrique sphérique : en deux dimensions :

(a) $ds^2 = R^2 \left((d\theta)^2 + \sin^2\theta\, (d\varphi)^2 \right)$

$ds^2 = (du)^2 + R^2 \sin^2 \left(\frac{u}{R} \right) (dv)^2$

$ds^2 =$ [illegible] $+ r^2\, d\varphi^2$

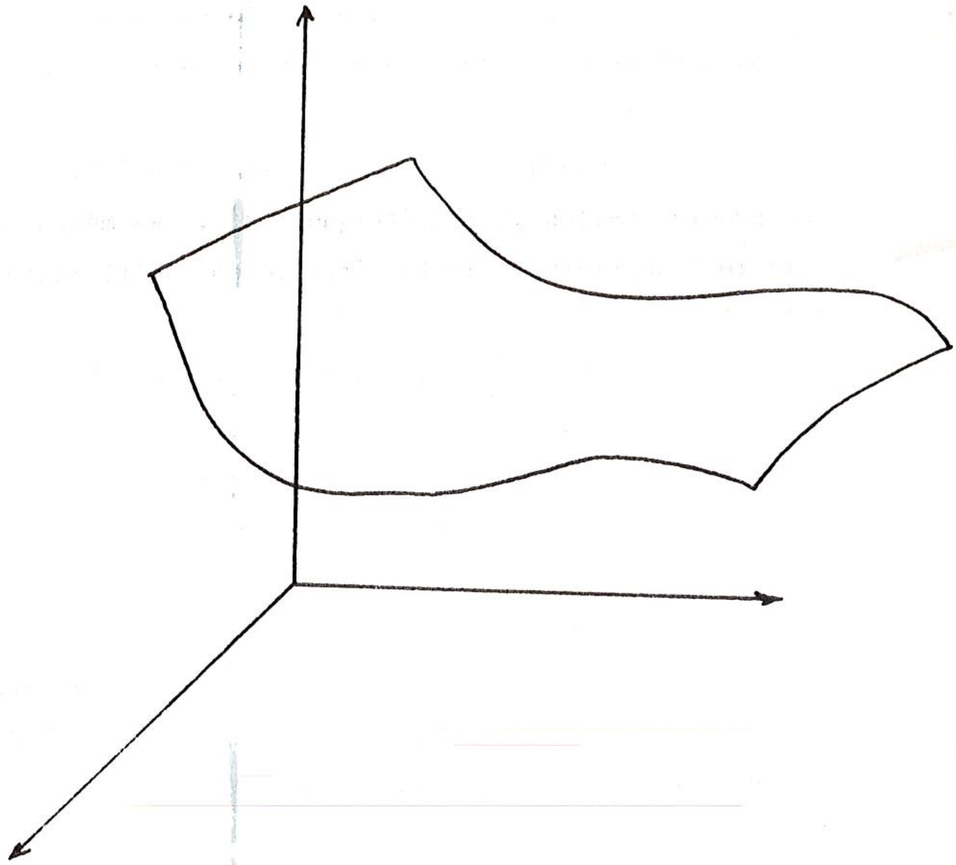
Les 3 formes, comme nous l'avons déjà vu, sont entièrement équivalentes et relèvent des propriétés géométriques de la surface d'une sphère de courbure 1/R.

On remarque que la forme métrique 2(c) peut être considérée comme une généralisation de la métrique 1(b) ; les mêmes "axes" interviennent, mais les coefficients de la métrique sont différents. Cet aspect se révèle très utile pour la suite : en effet, on ne sait pas écrire a priori la métrique qui correspond au monde actuel. Toutefois, on sait que la métrique euclidienne est une très bonne approximation à petite échelle : on peut donc intuitivement considérer que la métrique du monde à grande échelle sera une généralisation de la métrique euclidienne : c'est-à-dire, on ajoutera à la forme euclidienne des coefficients, dont les valeurs seront à établir d'après des caractéristiques empiriques.

On peut considérer le rapport entre la métrique (1) et (2) d'une autre façon. Reprenons l'analogie des fourmis, qui vivent cette fois-ci sur une surface dont la courbure change d'un endroit à un autre ; on suppose que, d'après des mesures très soignées mais localisées elles ont décidé que la métrique de leur monde est donnée par la forme euclidienne (1). Une autre tribu, vivant dans un endroit plus courbé, trouve que sa métrique est donnée par (2). Aucune transformation de coordonnées liées à la surface ne peut transformer la forme (1) en (2) ; par conséquent, toute loi de la physique qui contient l'intervalle de longueur ds^2 est soumise à un changement de forme quand on applique la transformation de coordonnées tribu (1) $\rightarrow$ tribu (2). Les fourmis diront que les lois de la physique ne sont pas invariantes par rapport à certains changements de repère !

3) Métrique sphérique : à trois dimensions :

Nous avons jusqu'ici étudié des métriques bi-dimensionnelles. Ces espaces pouvaient se visualiser et on peut même les dessiner, il suffit de construire un système cartésien de coordonnées rectangulaires et construire la surface par rapport à ces repères;



La méthode de Gauss appliquée aux espaces bi-dimensionnels, intéressante intellectuellement et indispensable pour des fourmis, ne sert pour nous que comme commodité de calcul -la trigonométrie sphérique nous permet toujours de retrouver les mêmes résultats autrement (quoique parfois difficilement).

Considérons maintenant la métrique :

$$(a) \qquad ds^2 = R^2 \left\{ d\omega^2 + \sin^2\omega \left[d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2 \right] \right\}$$

On remarque :

- il s'agit toujours d'une surface : la métrique est définie par une longueur à la puissance 2 ;

- il y a trois variables de repère (coordonnées) ω, θ, ϕ. Il s'agit donc d'une surface 3-dimensionnelle. Ce genre d'animal ne peut pas être visualisé (tout au moins, moi, je n'y arrive pas) ; de plus, nous ne pouvons pas "l'encastrer" dans un système de coordonnées cartésiennes, car toutes les

3 axes sont déjà utilisés dans la métrique.

Quelles sont les propriétés intrinsèques de cette surface ?

Considérons d'abord le cas θ = cte. On a donc $d\theta = 0$, ce qui donne :

$$ds^2\Big|_{\theta = cte} = R^2 \left[d\omega^2 + \sin^2\omega \, d\phi^2 \right]$$

c'est la métrique (2a) -les propriétés intrinsèques sont donc celles de la surface bi-dimensionnelle d'une sphère de courbure 1/R.

Considérons maintenant le cas ϕ = cte. On a $d\phi = 0$, et donc :

$$ds^2\Big|_{\phi = cte} = R^2 \left[d\omega^2 + \sin^2\omega \, d\theta^2 \right] :$$

c'est de nouveau une sphère de courbure 1/R.

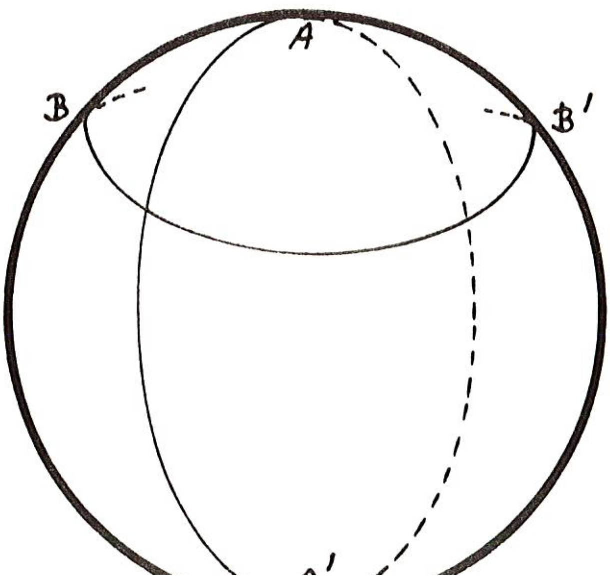
Considérons finalement ω = cte ; $d\omega$ = 0 et donc :

$$ds^2\Big|_{\omega = cte} = R^2 \sin^2\omega \left[d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2 \right]$$

Pour $\omega = \pi/2$ on a de nouveau la métrique di-dimensionnelle de la surface d'une sphère de courbure 1/R ; pour toute autre valeur, les propriétés relèvent toujours de la surface d'une sphère, mais de courbure $1/R\sin\omega$.

La métrique (3a) est donc celle d'une surface 3-dimensionnelle ayant une courbure 1/R. Malgré que nous ne puissions ni visualiser ni dessiner cette surface, nous pouvons définir sa courbure 1/R ; cette quantité est définie en unités de longueur et sans avoir recours à un système de repère quadri-dimensionnel.

Une analogie (imparfaite) avec la métrique bi-dimensionnelle peut guider notre intuition concernant le sens de ω, θ, ϕ. Sur la surface d'une sphère ordinaire, on peut dessiner 2 sortes de cercles :



(a) des cercles comme AA' ont toujours le même rayon quelle que soit leur orientation -ce sont les grands cercles.

(b) des cercles comme BB', dont le rayon est fonction de leur position sur la sphère.

Ces deux types de cercles sont suffisants pour identifier un point sur la surface de la sphère : ces cercles (latitude et longitude) servent comme "étiquettes" de repérage.

Il en est de même dans le cas de la surface tri-dimensionnelle sphérique : il faut trois étiquettes de repérage car il s'agit d'un système tri-dimensionnel ; θ et ϕ sont des "grands cercles", tandis que ω joue le rôle du cercle BB'.

Nous allons voir l'importance de cette notion dans la suite.

RIEMANN ET LES SURFACES MULTI-DIMENSIONNELLES

Les études de Gauss sur la géométrie non-euclidienne portaient sur des surfaces relativement limitées.

Riemann, au 19e siècle, s'est mis à étudier les propriétés des métriques les plus générales possibles. Une telle métrique s'écrit comme :

$$ds^2 = \sum_{i,k}^{n} g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

où :

g_{ik} sont les coefficients de la métrique.

Les seules contraintes imposées sont de nature mathématique, par exemple, les "x" ne doivent pas avoir de singularités, doivent être différentiables au moins deux fois, etc...

Cette étude a conduit au développement du calcul tensoriel; sans entrer dans les détails algébriques, nous pouvons citer les résultats importants, qui font intervenir seulement des matrices.

Riemann a trouvé que, pour toute métrique, quel que soit le nombre de dimensions, les propriétés géométriques intrinsèques sont entièrement déterminées quand on connaît deux quantités :

- une matrice R_{ij}, ayant n^2 composantes, dont $n(n+1)/2$ seulement sont indépendantes. On appelle cette matrice "le tenseur de courbure".
- un scalaire R, qui a l'interprétation physique d'une courbure pour les surfaces étudiées par Gauss.

R_{ij} et R sont exprimés en termes des coefficients de la métrique, g_{ik}. Toutefois, pour un ensemble de propriétés intrinsèques données (une métrique donnée), le résultat est indépendant du choix particulier du système de repères utilisé pour exprimer la métrique. Ce résultat généralise à n-dimensions le résultat de Gauss.

Le calcul tensoriel a permis à Riemann de trouver un résultat remarquable. Construisons la matrice (tenseur à deux indices)

$$E_{ij} = R_{ij} - R g_{ij}/2$$

A partir des n-coordonnées, nous pouvons construire le vecteur $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots\right)$; ce vecteur représente la généralisation à n-dimensions de la divergence habituelle. Le résultat remarquable de Riemann est que :

$$\mathrm{Div}\, E_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots\right)\left[R_{ij} - \frac{R g_{ij}}{2}\right]$$

$$\equiv 0$$

quels que soient la métrique, le système de repère, etc...

Ce résultat a permis à Einstein de lier la physique à la géométrie ; par la suite on a appelé

$$E_{ij} \equiv R_{ij} - R g_{ij}/2$$

le tenseur d'Einstein.

EINSTEIN, LA METRIQUE ET LA RELATIVITE GENERALE

Récapitulons le problème qui se sont posés après la relativité restreinte.

Le succès de la relativité restreinte a montré qu'il existe une famille de transformations -la transformation de Lorentz- entre deux systèmes de repère inertiels qui laisse invariantes les lois de la physique.

Toutefois, les lois de la physique, exprimées de façon traditionnelle, changent leur forme dès qu'on fait intervenir des systèmes de repère non-inertiels. Cela va à l'encontre de l'idée qu'un système de coordonnées n'est qu'un "étiquetage" conventionnel et ne devrait donc pas jouer de rôle dans la physique. De même, la relativité restreinte n'est pas valable dans un champ gravitationnel.

Par conséquent, il faut chercher à formuler le problème en termes de quantités qui ne dépendent pas du choix des coordonnées.

La formulation Minkowskienne de la relativité restreinte se révèle très utile pour mener à bien ce projet.

Minkowski a montré que la transformation de Lorentz nous permet de définir une quantité ds^2 :

$$ds^2 = c^2dt^2 - \sum_1^3 dx_i^2$$

qui est invariante par rapport aux translations et rotations d'un espace composé des quatre coordonnées ct, x, y, z ; les rotations complexes dans cet espace représentent les transformations de Lorentz.

Nous pouvons considérer ds^2 comme "l'intervalle de la longueur" dans le sens de Gauss, de cet espace quadri-dimensionnel.

Le ds^2 de Minkowski représente une métrique euclidienne. Or, la métrique euclidienne n'est pas la seule possible : de plus, seul l'observation peut nous indiquer la métrique propre à notre monde. Nous avons déjà vu, dans le contexte des fourmis, que si la métrique d'une surface n'est pas euclidienne mais si l'on se borne à la considérer comme telle, les résultats des mesures prennent un aspect incompréhensible -par exemple, ils ne sont pas nécéssairement invariants par rapport à certains changements de coordonnées.

La métrique quadri-dimensionnelle la plus générale est donnée par :

$$ds^2 = \sum_1^4 g_{ik} dx_i dx_k$$

Pour :

$$i = 1, \quad x_i \Rightarrow ct$$

$$i = 2,3,4, \quad x_i \Rightarrow x, y, z$$

Comme nous l'avons vu, les valeurs de g pour une métrique donnée, sont fonction du choix des coordonnées ; seules les propriétés intrinsèques (par exemple, la courbure) restent invariantes, et elles deviennent donc les éléments fondamentaux utilisés pour exprimer les lois de la physique.

Comment identifier les coefficients de la métrique pour une situation expérimentale donnée ?

HYPOTHESES DE LA RELATIVITE GENERALE

Deux circonstances nous permettent de lier les propriétés physiques du monde aux propriétés géométriques d'une métrique.

D'une part, les lois de la physique peuvent toujours être formulées sous forme d'une loi de conservation ou de continuité. Considérons, à titre d'exemple, la mécanique des fluides. Un élément d'un fluide est caractérisé par :

- la densité d'énergie u
- le flux d'énergie $\underline{S}$

Dans l'absence d'une source ou d'un puits d'énergie, l'écoulement vérifie la loi de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{S} = 0$$

Or, formellement, nous pouvons définir un vecteur :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

et une matrice :

$$\begin{bmatrix} u & & \\ S_x & \cdots & \\ S_y & & \\ S_z & & \end{bmatrix} \equiv T_{ij}$$

La loi de continuité peut alors être exprimée sous la forme matricielle :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) \begin{bmatrix} u \\ S_x \\ S_y \\ S_z \end{bmatrix} = 0$$

ou :

$$\mathrm{Div}\left[T_{ij}\right] = 0$$

où Div est une "divergence" quadri-dimensionnelle.

Plus généralement, on peut pour toute configuration physique construire une matrice T_{ij} composée de la façon suivante :

$$T_{ij} \equiv \left[\begin{array}{c|c} \text{densité d'énergie} & \text{densité du moment} \\ \hline \text{flux d'énergie} & \text{flux du moment} \end{array}\right]$$

Cette matrice sera composée de 4×4 composantes, réparties de la façon suivante :

(3 composantes d'espace + 1 composante de temps)

× (3composantes d'espace + 1 composante de temps).

Dans le cas le plus général les éléments auront des contributions dues aux champs, courants éléctro-magnétiques, champs gravitationnels, mouvements de matière, etc...

Construite de cette manière, la matrice doit vérifier la loi de continuité :

$$\mathrm{Div}\ [T_{ij}] = 0$$

où :

$$\mathrm{Div} \equiv \left[\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right]$$

On appelle $[T_{ij}]$ "le tenseur de énergie-impulsion" ; chaque cas physique aura son propre tenseur.

D'autre part, comme nous l'avons vu, Riemann a trouvé que, pour toute métrique, on peut en principe construire à l'aide des coefficients de la métrique un tenseur, le tenseur d'Einstein E_{ij}, dont la divergence généralisée est toujours nulle, quelle que soit la métrique ou le système de coordonnées utilisé pour l'exprimer :

$$\mathrm{Div}\ [E_{ij}] \equiv 0$$

Plus généralement, on trouve que toutes les propriétés du tenseur d'énergie-impulsion sont identiques à celles du tenseur d'Einstein ; on <u>suppose</u> alors que <u>l'on peut identifier l'un avec l'autre</u> :

$$E_{ij} \Rightarrow T_{ij}$$

Comme E_{ij} est exprimé en termes de g_{ij} , tandis que T_{ij} est imposé par la physique du problème, nous pourrons en principe calculer les valeurs de g_{ij} , et donc trouver la métrique propre du cas physique choisi (champs gravitationnels, électromagnétiques, mouvements, etc...)

La deuxième hypothèse concerne la cinématique. Dans la physique newtonienne, le chemin d'une particule libre isolée est une droite. Cette recette n'est plus utilisable dans le contexte de la relativité générale : la loi d'inertie de Newton n'a pas de bonnes propriétés en ce qui concerne les transformations arbitraires de coordonnées. Einstein a donc généralisé la loi d'inertie : le chemin parcouru par une particule dans l'espace quadri-dimensionnel est celui qui donne <u>une valeur stationnaire</u> de l'intervalle de longueur ds^2.

Cette formulation rappelle le principe de Fermat.

Considérons 3 cas précis :

1) Espace euclidien :

$$ds^2 = \sum dx_i^2$$

La valeur stationnaire de ds^2 est donnée par des <u>droites</u>.

2) Surface sphérique bi-dimensionnelle de rayon R :

$$ds^2 = R^2 \left[du^2 + \sin^2 u \, dv^2\right]$$

La valeur stationnaire est donnée par des grands cercles.

3) Métrique de Minkowski :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2$$

où :

$$dl^2 = \sum_i dx_i^2$$

Pour des rayons lumineux :

$$ds^2 = 0$$

et on montre que cette valeur est stationnaire. Par conséquent, la propagation de lumière est définie par :

$$dl^2 = c^2 dt^2$$

soit une propagation rectiligne.

Donc la loi d'inertie d'Einstein, adaptée aux exigences du principe de la relativité générale, donne les résultats habituels pour les cas habituels.

RESUME DE LA "RECETTE D'EINSTEIN POUR TROUVER LA METRIQUE QUI CORRESPOND A UNE SITUATION PHYSIQUE DONNEE.

1) Généraliser la métrique de Minkowski :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \sum_1^3 dx_i^2$$

En général, il est commode d'exprimer cette métrique à l'aide des coordonnées propres à la symétrie géométrique du problème. Par exemple, si l'on considère un problème ayant une symétrie sphérique spatiale (comme on le fera toujours dans la suite), on utilise les coordonnées polaires euclidiennes :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - r^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

2) "Généraliser" la métrique euclidienne en ajoutant des coefficients dont la valeur sera calculée par la suite, par exemple pour le cas de symétrie sphérique :

$$ds^2 = \alpha \, c^2 dt^2 - \beta r^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

Les coefficients seront, dans le cas le plus général, fonctions de toutes les variables ; toutefois, dans le cas d'une symétrie sphérique, ils ne peuvent être fonction que de t et de r. De plus, pour ce cas, on remarque que r ne joue pas le même rôle que θ et ϕ : en effet, la distance a un sens particulier, étant définie, par exemple, par rapport à une masse particulière, tandis que la définition de θ et ϕ est complètement arbitraire.

Par conséquent, dans ce cas isotrope, il n'y a pas lieu d'introduire des coefficients devant les termes $r^2 d\theta^2$ et $r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$

Il est souvent commode d'introduire les coefficients de façon à ce que la métrique se réduise à celle de Minkowski quand les valeurs des inconnus sont zéro. Par conséquent, on écrit souvent :

$$\alpha = e^{\lambda}$$
$$\beta = e^{\mu}$$

λ et μ étant les variables à déterminer.

3) A partir de la forme choisie pour la métrique, on peut établir le tenseur d'Einstein :

$$E_{ij} = R_{ij} - R\,g_{ij}/2$$

Dans le cas particulier ci-dessus, ce tenseur sera exprimé en fonction de α, β ou en fonction de λ, μ selon l'expression utilisée.

4) Construire le tenseur énergie-impulsion T_{ij} pour la distribution des masses, champs etc... en question.

5) $$T_{ij} = R_{ij} - R\,g_{ij}/2$$

On peut alors exprimer les coefficients inconnus en fonction des paramètres physiques du problème.

6) Les chemins suivis par des particules seront donnés par une valeur stationnaire de ds^2. En particulier, les rayons lumuneux vérifient

$$ds^2 = 0.$$

<u>EXEMPLE 1 : MASSE M SITUEE A r = 0 -METRIQUE DE SCHWARZSCHILD</u>

Ce cas possède une symétrie sphérique évidente ; il convient alors d'utiliser la métrique :

$$ds^2 = \alpha^2 c^2 dt^2 - \beta r^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2$$

Par ailleurs, si l'on suppose que ni la masse ni sa position ne changent en fonction du temps, α et β seront indépendants de t.

Pour l'espace à l'extérieur de la masse, tous les éléments du tenseur masse-énergie disparaissent (il n'y a pas d'écoulements, etc...). Donc :

$$T_{ij} = [0]$$

Par conséquent :

$$R_{ij} - R\,g_{ij}/2 = 0$$

R_{ij} et g_{ij} sont exprimés en fonction de α et β ; une analyse tensorielle montre que :

$$\alpha = 1 + \frac{b}{r}$$

$$\beta = 1/\left[1 + \frac{b}{r}\right]$$

où : b est une constante d'intégration, qu'il va falloir identifier par la suite.

Donc, la métrique propre à l'espace qui entoure une masse située à r = 0 est :

$$ds^2 = c^2\left(1+\frac{b}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1+b/r} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

On l'appelle "la métrique de Schwarzschild".

Remarquons qu'il n'existe aucune transformation qui permet de passer de la métrique de Schwarzschild (pour b $\neq$ 0) à la métrique de Minkowski :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

Il s'ensuit que les propriétés géométriques intrinsèques de l'espace qui entoure une masse ne correspondent pas à la géométrie euclidienne (sauf pour le cas b = 0).

Quel est le parcours d'une particule libre dans le voisinage de la masse M ?

La "version généralisée" de la loi d'inertie identifie le chemin d'une particule avec la courbe qui donne une valeur stationnaire de ds^2. On montre que l'équation qui vérifie cette condition est, en coordonnées polaires :

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 + \frac{b}{r}\left[1 + r^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2\right] = cte.$$

Pour interpréter la signification de cette équation, il est commode de la comparer avec l'équation du mouvement calculée d'après la loi de gravitation de Newton et les équations de mouvement traditionnelles ; exprimée en coordonnées polaires la loi des aires de Képler est donnée par :

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - \frac{2GM}{r} = cte.$$

Divisons par c^2 :

$$\left(\frac{dr}{c\,dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{c\,dt}\right)^2 - \frac{2GM}{c^2 r} = cte.$$

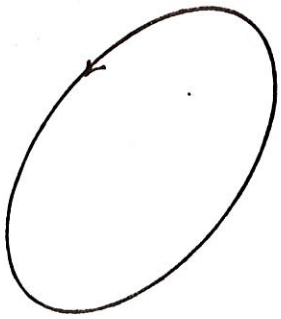
On, l'invariant ds peut se calculer en coordonnées qui se déplacent avec la planète (on dit "comobiles avec la planète" -dans le jargon de la relativité) ; on a alors ds = cdt, ce qui donne les lois de Képler exprimées avec la notation de la relativité :

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 - \frac{2GM}{c^2 r} = cte.$$

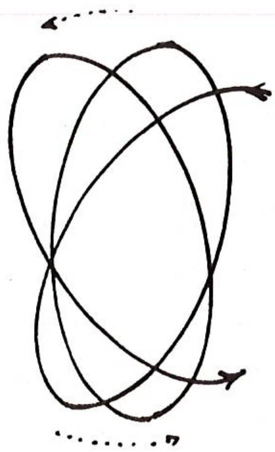
On remarque immédiatement que, si l'on néglige le terme en dans l'expression relativiste, les deux résultats ont la même forme : donc dans une première approximation, la relativité générale restitue les résultats précédents (heureusement !). Ce procédé nous permet aussi d'identifier "b" avec des quantités "habituelles" :

La modification introduite par la relativité générale sur les mouvements orbitaux est dans la présence du terme en $r^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2$.

Avec ce terme, une orbite elliptique ne se renferme plus : plus précisément, l'axe majeur de l'orbite tourne avec le temps.



orbite elliptique képlérienne



orbite, avec "l'avance du périhélie"

On appelle ce phénomène "l'avance du périhélie". Un calcul détaillé montre que cette avance est petite ; néanmoins, elle fournit un des tests expérimentaux de la relativité générale.

En effet, l'orbite de Mercure a une ellipticité relativement élevée et il a déjà été remarqué au 19e siècle qu'il y a une avance du périhélie d'environ 575" par siècle. Dans l'optique pré-relativiste du 19e siècle, on essayait d'interpréter cette avance à l'aide de :

- perturbations sur Mercure de toutes les planètes connues (une orbite étant parfaitement képlérienne seulement dans le cas d'un problème à deux corps). Des calculs détaillés ont montré que cette contribution à l'avance ne dépasse pas environ 534" par siècle -avec donc un "résidu" inexpliqué de 41" $\pm$ 2.1" par siècle ;

- la présence à l'intérieur de l'orbite de Mercure d'une planète -provisoirement appelée Vulcan- jusqu'alors inconnue. Cette planète n'a jamais été observée ;
- une modification empirique dans la loi de gravitation de Newton : en effet : si on remplace la loi :

$$F \propto 1/r^2$$

par une loi ayant la forme :

$$F \propto 1/r^{2+\alpha}$$

où α est une petite constante, on peut effectivement produire des orbites elliptiques telles que les périhélies précessent : les orbites parfaitement fermées sont une conséquence de la forme quadratique de la loi de gravitation. Or, les mesures directes de la loi de gravitation n'ont pas une précision suffisante pour qu'on puisse éliminer cette hypothèse.

La relativité générale permet d'interpréter l'avance du périhélie de Mercure de façon satisfaisante, sans introduction d'hypothèses ad hoc. Elle permet aussi le calcul de la grandeur du phénomène ; dans la théorie d'Einstein, on prévoit une avance d'environ 43" par siècle.

Remarquons ici que la grandeur du phénomène dépend de la forme initiale supposée pour la métrique. Depuis Einstein, on a essayé de construire des métriques de forme légèrement différente -et notamment dont les propriétés de symétrie ne sont pas les mêmes. Ces autres "réalisations" de la relativité générale prévoient aussi une avance du périhélie de Mercure -malheureusement, la valeur est trop petite par rapport aux mesures. Comme "a priori" on ne sait pas quelle réalisation est la bonne, il y a eu récemment un regain d'intérêt dans les calculs de l'avance à l'aide des méthodes "classiques". En particulier, Dicke a remarqué que dans tout calcul orbital de Mercure, on a toujours supposé que la distribution de masse dans le Soleil est parfaitement sphérique, ce qui nous a permis de remplacer le Soleil par une masse ponctuelle.

Or, <u>si</u> le Soleil n'était pas parfaitement rond, on n'aurait plus le droit d'introduire cette simplification ; les calculs détaillés montrent qu'une orbite elliptique autour d'une masse <u>aplatie</u> <u>n'est pas fermée</u> : il y a dans ce cas une avance du périhélie, dont la valeur est fonction de l'aplatissement supposé du Soleil.

Un aplatissement extrêmement petit serait suffisant pour s'accorder avec les observations de Mercure.

Or, il est extrêmement difficile de mesurer la forme du Soleil :

- le disque n'est pas éclairé uniformément ;
- le bord n'est pas bien déterminé ;
- la turbulence atmosphérique engendre des fluctuations aléatoires de la position du bord qui sont bien plus grandes que la grandeur prévue du phénomène.

De ce fait, depuis quelques années, des expériences de plus en plus sophistiquées ont essayé de déterminer la forme du Soleil. On croit maintenant être à la précision expérimentale nécessaire... et le Soleil se révèle être rond.

QUEL EST LE PARCOURS D'UN RAYON LUMINEUX DANS LE VOISINAGE DE LA MASSE M ?

Les calculs précédents nous permettent d'exprimer la métrique de Schwarzschild en fonction des quantités mesurables "classiquement" :

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2GM/c^2 r} - r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\phi \, d\phi^2$$

Comme nous l'avons déjà indiqué, le parcours d'un rayon lumineux est déterminé par la condition :

$$ds^2 = 0$$

L'équation du mouvement d'un rayon lumineux est donc donnée par :

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2GM/c^2 r} - r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\phi \, d\phi^2 = 0$$

On constate aisément que cette équation n'est pas celle d'une droite, sauf dans la limite $r \to \infty$.

Autrement dit : un rayon lumineux poursuit une chemin courbe dans le voisinage d'une masse ; on montre que la déviation par rapport à une droite est vers la masse.

La confirmation expérimentale de ce phénomène constitue aussi un test expérimental important de la relativité générale. L'effet est petit -d'environ 2" pour un rayon qui "rase" le bord du Soleil- mais depuis 1918 il a été vérifié plusieurs fois par 3 méthodes indépendantes.

- Au cours d'une éclipse de Soleil totale, on photographie le champ stellaire au voisinage immédiat du Soleil et on le compare à la photographie du même champ en l'absence du Soleil ; le déplacement relatif des étoiles dans le champ donne la déviation des rayons lumineux ;
- l'interférométrie radioastronomique permet aujourd'hui de préciser la position dans le ciel d'une radiosource avec une précision inférieure à 10^{-3} sec. La détermination de la position apparente de certaines radiosources quand le Soleil se trouve très près et dans l'absence de Soleil a fourni un test particulièrement précis ;
- la mesure de la position apparente des sondes interplanétaires quand elles passent derrière le Soleil, en considérant la sonde comme une source radio, peut être comparée avec une détermination basée sur les calculs du trajet : les résultats, bien que moins précis, sont en accord avec la relativité générale.

CAS PARTICULIER DU PARCOURS LUMINEUX -LE "TROU NOIR"

Le parcours lumineux dans le voisinage d'une masse M étant donné par :

$$\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1-2GM/c^2 r} - r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\phi \, d\phi^2 = 0$$

on voit que la quantité

joue un rôle critique; en particulier quand :

$$1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 0$$

l'équation du mouvement d'un rayon lumineux devient tout simplement :

$$dr^2 = 0$$

où :

$$r = \text{cte.}$$

Dans ces conditions, un rayon lumineux poursuit un trajet "fermé", de rayon

$$r = 2GM/c^2$$

Pour qu'une masse M puisse "dévier" un rayon lumineux à ce point, son rayon R doit être inférieur à r :

$$R < r = 2GM/c^2$$

Sinon, ce calcul ne s'applique pas, car nous avons partout supposé que nous nous trouvons <u>à l'extérieur</u> de M.

On appelle la quantité

$$2GM/c^2 = R_c$$

"le rayon de Schwarzschild".

Un corps dont le rayon est inférieur à son rayon de Schwarzschild ne peut pas émettre du rayonnement (ni des particules massives, dont les vitesses seront obligatoirement inférieures à c) ; de plus, des photons "lancés" vers un tel objet restent "piégés".

On appelle cet objet <u>hypothétique</u> un trou noir ; bien que rien n'empêche son existence, on n'a pas pu en trouver un exemple certain.

<u>DECALAGE SPECTRAL GRAVITATIONNEL</u>

Une onde est émise dans le voisinage d'une masse M ; considérons la propagation d'une crête de cette onde, l'émission ayant les coordonnées (r, θ, ϕ, t)

La crête est reçue par un observateur ayant les coordonnées (r_0, θ, ϕ, t_0).

Le trajet étant supposé radial,

$$d\theta = d\phi = 0$$

Comme le parcours d'un rayon lumineux est donné par $ds^2 = 0$, l'équation de mouvement de la crête s'écrit :

$$c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2GM/c^2 r} = 0$$

d'où :

$$\frac{dr}{dt} = c\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)$$

Cette équation peut être intégrée le long du parcours :

$$\int_{r}^{r_0} \frac{dr}{c\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)} = \int_{t}^{t_0} dt$$

Considérons maintenant la crête suivante, émise à $t + \delta t$ et reçue à $t_0 + \delta t_0$; on suppose que les autres coordonnées ne changent pas. Par conséquent, l'équation de mouvement de cette crête s'écrit, tout comme avant :

$$\int_{r}^{r_0} \frac{dr}{c\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)} = \int_{t+\delta t}^{t_0+\delta t_0} dt$$

Le second terme de cette expression peut être décomposé de la façon suivante :

$$\int_{t+\delta t}^{t_0+\delta t_0} dt \equiv \int_{t+\delta t}^{t} dt + \int_{t}^{t_0} dt + \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} dt$$

Or, d'après le mouvement de la première crête :

$$\int_{t}^{t_0} dt = \int_{r}^{r_0} \frac{dr}{c\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)}$$

Donc l'équation de mouvement de la deuxième crête se réduit à :

$$0 = \int_{t+\delta t}^{t} dt + \int_{t_0}^{t_0+\delta t} dt$$

d'où :

$$\delta t_0 = \delta t$$

Un réflexe naturel serait d'identifier δt, δt_0 avec des intervalles de temps enregistrés par des horloges placées aux endroits en question. En relativité générale, <u>il faut se méfier des réflexes naturels</u> ; il est indispensable de contrôler ses suppositions par des arguments physiques.

Considérons donc deux événements séparés de coordonnées

$$\delta t \neq 0, \quad \delta r = \delta \phi = \delta \theta = 0 .$$

Comme la séparation spatiale est zéro, le temps d'horloge, δt_H, est égal à l'intervalle de longueur qui sépare ces deux événements (divisé par c). Or, d'après la métrique de Schwarzschild pour $\delta r = \delta\phi = \delta\theta = 0$:

$$\delta s = c\left[1-\frac{2GM}{c^2 r}\right]^{1/2} \delta t$$

d'où :

$$\delta t_H = \delta s / c$$

$$= \left[1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right]^{1/2} \delta t$$

On remarque immédiatement un résultat très important -le passage de temps, <u>mesuré par une horloge</u>, n'est pas en général égal à δt : ce dernier joue le rôle d'une "étiquette" de repérage mais il n'est pas directement accessible aux mesures faites avec une horloge. De plus, le passage de temps est fonction de la distance entre l'horloge et la masse (dans ce cas de la métrique de Schwarzschild).

Le centre du système de repère est le centre de la masse M.

Par conséquent, comme δt représente la différence des coordonnées temporelles entre deux crêtes de l'onde émise à la surface de la source, la période de l'onde (quantité mesurée par une horloge) à l'émission est donnée par τ :

$$\tau = \left[1 - \frac{2GM}{c^2 R} \right]^{1/2} \delta t$$

De même, la période de l'onde à l'observateur est donnée par τ_o :

$$\tau_o = \left[1 - \frac{2GM}{c^2 r_o} \right]^{1/2} \delta t_o$$

où : r_o = distance de l'observateur.

Pour $r_o \rightarrow \infty$:

$$\tau_o \rightarrow \delta t_o$$

Donc :

$$\frac{\tau_o}{\tau} = \left[1 - \frac{2GM}{c^2 R} \right]^{-1/2} \frac{\delta t_o}{\delta t}$$

Or, pour la métrique de Schwarzschild, nous avons vu que :

$$\delta t = \delta t_o$$

d'où :

$$\frac{\tau_o}{\tau} = \left[1 - \frac{2GM}{c^2 R} \right]^{-1/2}$$

La différence de période observée correspond à un décalage spectral

$\Delta\lambda$

$$\frac{\tau_0}{\tau} = \frac{\lambda + \Delta\lambda}{\lambda}$$

$$= 1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

d'où :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left[1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right]^{-1/2} - 1$$

Donc, une raie spectrale émise à la surface d'un corps suffisamment compact sera décalée vers les grandes ondes, le décalage étant fonction de M/R.

Ces résultats ont été pleinement vérifiés ; en voici deux exemples.

1) Pour le Soleil :

$R \approx 7 \times 10^{10}$ cm

$M \approx 2 \times 10^{33}$ g

En prenant $\lambda \approx 5\,000$ Å , on trouve

$$\Delta\lambda \approx 10^{-2} \text{ Å}$$

Ce décalage a été mesuré.

2) Pour la Terre, l'effet est beaucoup plus petit et pour le détecter expérimentalement, les raies spectrales optiques sont de loin trop larges. Toutefois, un effet nucléaire -l'effet Mössbauer- produit des raies très fins ; on a pu ainsi vérifier ce décalage spectral au laboratoire.

Avant de quitter cet exemple, remarquons qu'il est possible de retrouver, qualitativement, tous les résultats essentiels à l'aide d'un raisonnement simple (mais "louche"). En effet, nous pouvons considérer l'onde électromagnétique comme un flux de photons ; l'énergie d'un photon étant $h\nu$, il est fomellement associé avec un photon, une "masse" donnée par la relativité restreinte :

$$m_{ph} \cdot h\nu / c^2$$

(cette masse n'est pas la "masse du photon" dont il était question dans certaines cosmologies récentes).

Par la suite, il suffit de considérer la propagation des particules dans un champ gravitationnel ordinaire. Par exemple, des particules émises à la surface d'un corps perdent de l'énergie qui se traduit dans le cas des photons par une baisse de la fréquence.

> QUESTION : Trouver, à un facteur numérique près, le rayon de Schwarzschild et le décalage spectral, à l'aide de cette méthode.

Exemple 2 : distribution continue, isotrope, homogène et statique de matière avec densité ρ.

Densité d'énergie = ρc^2

d'où :

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \rho c^2 & 0 \\ & 0 \end{bmatrix}$$

donc :

$$R_{ij} - \frac{R}{2} g_{ij} = \begin{bmatrix} \rho c^2 & 0 \\ & 0 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, on montre que les coefficients de la métrique:

$$ds^2 = \alpha c^2 dt^2 - \beta r^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 d\phi^2$$

prennent la forme suivante :

$$\alpha = 1$$
$$\beta = (1 - r^2/R^2)^{-1}$$

où :

$$R^2 = 1/4\pi\rho$$

Donc, la métrique d'une telle distribution de matière est donnée par :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \left[\frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 \right]$$

Pour identifier les propriétés géométriques de cette métrique, faisons la transformation suivante :

$$r = R \sin \omega$$

On trouve alors :

$$ds^2 = -R^2 \left[d\omega^2 + \sin^2\omega \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2 \right) \right] + c^2 dt^2$$

et <u>on reconnaît la métrique d'une surface 3-dimensionnelle sphérique de courbure 1/R.</u>

<u>Attention</u> à la définition de distance. La coordonnée "r" est une "étiquette" de repérage radial ; quel est son rapport avec une "distance" mesurée, par exemple, à l'aide d'une règle ?

Considérons deux événements définis par les coordonnées (r_1, θ, ϕ, t) et (r_2, θ, ϕ, t). On a alors entre ces deux événements $d\theta = d\phi = dt = 0$, et l'intervalle de longueur donne la distance mesurée :

$$ds^2 = -\,dr^2/(1 - r^2/R^2) = -(\text{distance})^2$$

On remarque que, selon la signature (+ - - -), le signe d'une distance est opposé au signe de la partie spatiale de l'intervalle de longueur.

Nous voyons donc que :

$$\text{distance} = \frac{dr}{(1 - r^2/R^2)^{1/2}} \neq dr$$

En particulier, la distance entre $(0, \theta, \phi, t)$ et (r, θ, ϕ, t) <u>n'est pas égale à r</u>.

On voit maintenant l'intérêt de la transformation :

$$r = R \sin \omega$$

On a :

$$dr = R \cos \omega \, d\omega$$

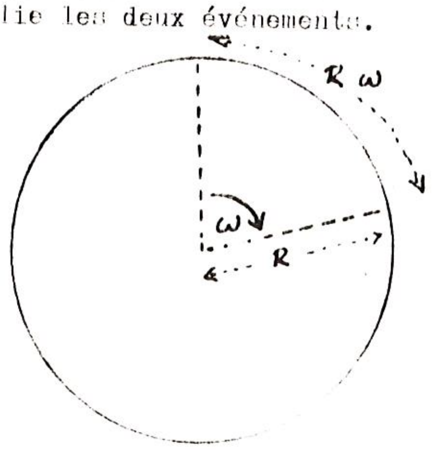
d'où :

$$\text{distance} = \frac{dr}{(1 - r^2/R^2)^{1/2}} \qquad \text{pour} \quad d\theta = d\phi = dt = 0$$

$$= \frac{R \cos \omega \, d\omega}{(1 - \sin^2 \omega)^{1/2}}$$

$$= R \, d\omega$$

Or, nous avons déjà vu lors de la discussion des propriétés géométriques de la surface tri-dimensionnelle sphérique (page 24), que le paramètre ω définit un cercle sur la surface de la sphère ; par conséquent, la distance entre deux événements entre lesquels $d\theta = d\phi = dt = 0$, trouve une interprétation géométrique simple -c'est la longueur d'un arc de cercle qui relie les deux événements.



Remarquons toutefois que cette interprétation est limitée au cas $d\theta = d\phi = dt = 0$. Pour tout autre cas (en particulier, si $dt \neq 0$) on ne peut donner acune définition <u>unique</u> de distance : le résultat est fonction de la méthode utilisée pour effectuer les mesures et aucune méthode ne peut être considérée comme la plus "vraie" -en effet, c'est la notion même d'une "distance" invariante qui est remise encause.

En ce qui concerne "l'étiquette" t, considérons deux événements (r, θ, ϕ, t) et $(r, \theta, \phi, t + \delta t)$.

On a donc $\delta r = \delta\theta = \delta\phi = 0$, et l'intervalle de longueur δs indique alors un intervalle de temps d'horloge :

$$\delta s^2 = c^2 \delta t^2 = c^2 \delta t^2_{horloge}$$

Par conséquent, dans le cas de cette métrique, l'étiquette de repérage t indique aussi le passage de temps d'horloge (ce qui n'était pas le cas pour la métrique de Schwarzschild).

<u>COMMENT EST LA PROPAGATION D'UN RAYON LUMINEUX</u> ?

Considérons l'émission d'une crête à (r, θ, ϕ, t). Cette crête est reçue par un observateur à $(0, \theta, \phi, t_0)$.

Comme entre la source et l'observateur $d\theta = d\phi = 0$, la propagation est, en quelque sorte, "radiale".

Le parcours d'un rayon lumineux est défini par :

$$ds^2 = 0$$

ce qui donne l'équation du mouvement :

$$\frac{dr}{dt} = [1 - r^2/R^2]^{1/2}$$

d'où :

$$\int_r^0 \frac{dr}{(1 - r^2/R^2)^{1/2}} = \int_t^{t_0} dt$$

Une deuxième crête est émise à $t + \delta t$; elle est reçue à $t_0 + \delta t_0$.

On a donc :

$$\int_r^0 \frac{dr}{(1 - r^2/R^2)^{1/2}} = \int_{t+\delta t}^{t_0+\delta t} dt$$

ce qui nous donne (pour la méthode, voir la métrique de Schwarzschild) :

$$\delta t = \delta t_0$$

Or, t représente cette fois-ci le passage de temps d'horloge ; par conséquent (et contrairement au cas de la métrique de Schwarzschild), la période de l'onde émise à la source est égale à la période quand elle arrive à l'observateur.

Remarquons un dernier aspect de cette métrique. En fin de compte, elle est caractérisée par une courbure $1/R = 4\pi\rho$; ρ étant constant, la courbure l'est aussi. Cette métrique est donc <u>statique</u>. En effet, dès le départ, on a supposé que les coefficients de la métrique, α et β étaient indépendants de θ, ϕ et de t.

<u>Exemple 3</u> : distribution continue, isotrope, homogène et non stationnaire de matière, avec densité ρ.

Une forme plus générale de la métrique, en tenant compte d'une variation éventuelle avec le temps, s'écrit :

$$ds^2 = \alpha c^2 dt^2 - \beta dr^2 - \gamma (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2)$$

Maintenant α, β, γ peuvent être fonctions de r et de t ; de nouveau, le caractère arbitraire des coordonnées θ et ϕ assure que les coefficients de la métrique n'en sont pas fonctions.

L'identification des coefficients de la métrique se fait essentiellement comme dans le cas précédent et on trouve :

$$\alpha = 1$$

$$\beta = \gamma = Q(t) \Big/ \left(1 + r^2/4R_0^2\right)^2$$

où : Q et R_0 relèvent essentiellement des constantes d'intégration.

La métrique propre à cet espace non stationnaire est donc :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{Q(t)}{(1 + r^2/4R_0^2)} \left[r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2\right]$$

Cette forme, exprimée en termes des coordonnées initiales, n'est pas très commode ; en gardant à l'esprit que toute transformation (dans la surface) est permise car la métrique est indépendante du système de repère et qu'en tout cas les coordonnées de repère n'ont pas nécessairement une interprétation physique simple et donc on n'a aucun intérêt à s'accrocher à un ensemble particulier, nous procédons aux transformations suivantes :

1) $u = r/R_o$ – une variable non-dimensionnelle

$R^2(t) = R_o^{\,2}Q(t)$

On trouve alors :

$$ds^2 = c^2dt^2 - \frac{R(t)^2}{(1+u^2/4)^2}\left[du^2 + u^2d\theta^2 + u^2\sin^2\theta\, d\phi^2\right]$$

2) $V = u/(1+\frac{u^2}{4})$

On trouve alors :

$$ds^2 = -R(t)^2\left[\frac{dV^2}{1-V^2} + V^2d\theta^2 + V^2\sin^2\theta\, d\phi^2\right] + c^2dt^2$$

3) $\sin W = V$

On trouve alors :

$$ds^2 = -R(t)^2\left[dW^2 + \sin^2 W\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right] + c^2dt^2$$

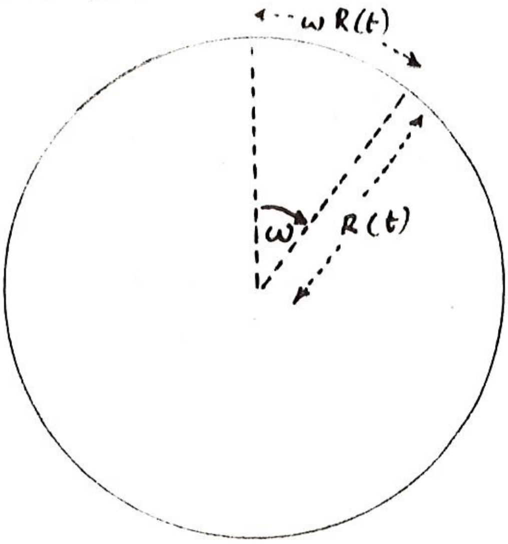
Ces trois formes, en apparence très différentes, relèvent des mêmes propriétés géométriques -les trois métriques représentent donc la même physique. On utilise la forme qui convient.

On appelle cette métrique la métrique de Robertson-Walker.

QUELQUES PROPRIETES DE LA METRIQUE DE ROBERTSON-WALKER

1) Dans la troisième forme de la métrique, on reconnaît immédiatement que la partie spatiale représente la surface tri-dimensionnelle d'une sphère de rayon $R(t)$

2) Distances radiales ($d\theta = d\phi = 0$) définies par $R(t)dW$ si $dt = 0$. Cela revient à une distance à associer à la longueur des arcs des cercles sur la surface de la sphère.



Pour des cas plus généraux ($dt \neq 0$), aucune définition unique n'est possible -il faut définir la méthode.

3) Il n'y a pas de coefficient qui multiplie $c^2 dt^2$; par conséquent, comme on a vu pour le cas analogue précédent, la coordonnée de repérage "t" peut être associée directement au passage de temps d'horloge.

4) $R(t)$ joue le rôle d'un "rayon de courbure". Cette quantité a les dimensions de longueur et sa détermination est possible <u>en principe</u> à l'aide de mesures effectuées sur la surface tri-dimensionnelle.

<u>MOUVEMENT DES RAYONS LUMINEUX</u>

On suppose émise à $(\omega, \theta, \phi, t)$ la crête d'une onde.

On suppose cette crête reçue par un observateur situé à $(0, \theta, \phi, t_0)$.

Comme $d\theta = d\phi = 0$, le trajet est "radial".

Le parcours est défini comme toujours par :

$$ds^2 = 0$$

d'où l'équation de mouvement :

$$-R(t)^2 d\omega^2 + c^2 dt^2 = 0$$

Donc :

$$\int_\omega^0 d\omega = c^2 \int_t^{t_0} \frac{dt}{R(t)}$$

Une deuxième crête est émise à $(\omega, \theta, \phi, t + \delta t)$; elle est reçue à $(0, \theta, \phi, t_0 + \delta t_0)$.

Son équation de mouvement est donc :

$$\int_\omega^0 d\omega = c^2 \int_{t+\delta t}^{t_0 + \delta t_0} dt/R(t)$$

ce qui nous donne :

$$\frac{\delta t}{R(t)} = \frac{\delta t_0}{R(t_0)}$$

Or, t est associé avec le passage de temps d'horloge ; par conséquent :

$$\frac{\delta t_0}{\delta t} = \frac{\lambda + \Delta\lambda}{\lambda} = \frac{R(t_0)}{R(t)}$$

Si $R(t_0) > R(t)$, la longueur d'onde reçue est supérieure à la valeur émise : on observe donc un décalage spectral vers les grandes ondes.

Plus généralement on montre que, dans une métrique de Robertson-Walker <u>toute longueur mesurée</u> ℓ est proportionnelle au rayon de courbure $R(t)$:

$$\frac{\ell(t_1)}{\ell(t_2)} = \frac{R(t_1)}{R(t_2)}$$

Dans ce sens, R joue le rôle d'un facteur d'échelle.

Nous allons voir l'importance de ces notions dans les applications cosmologiques.