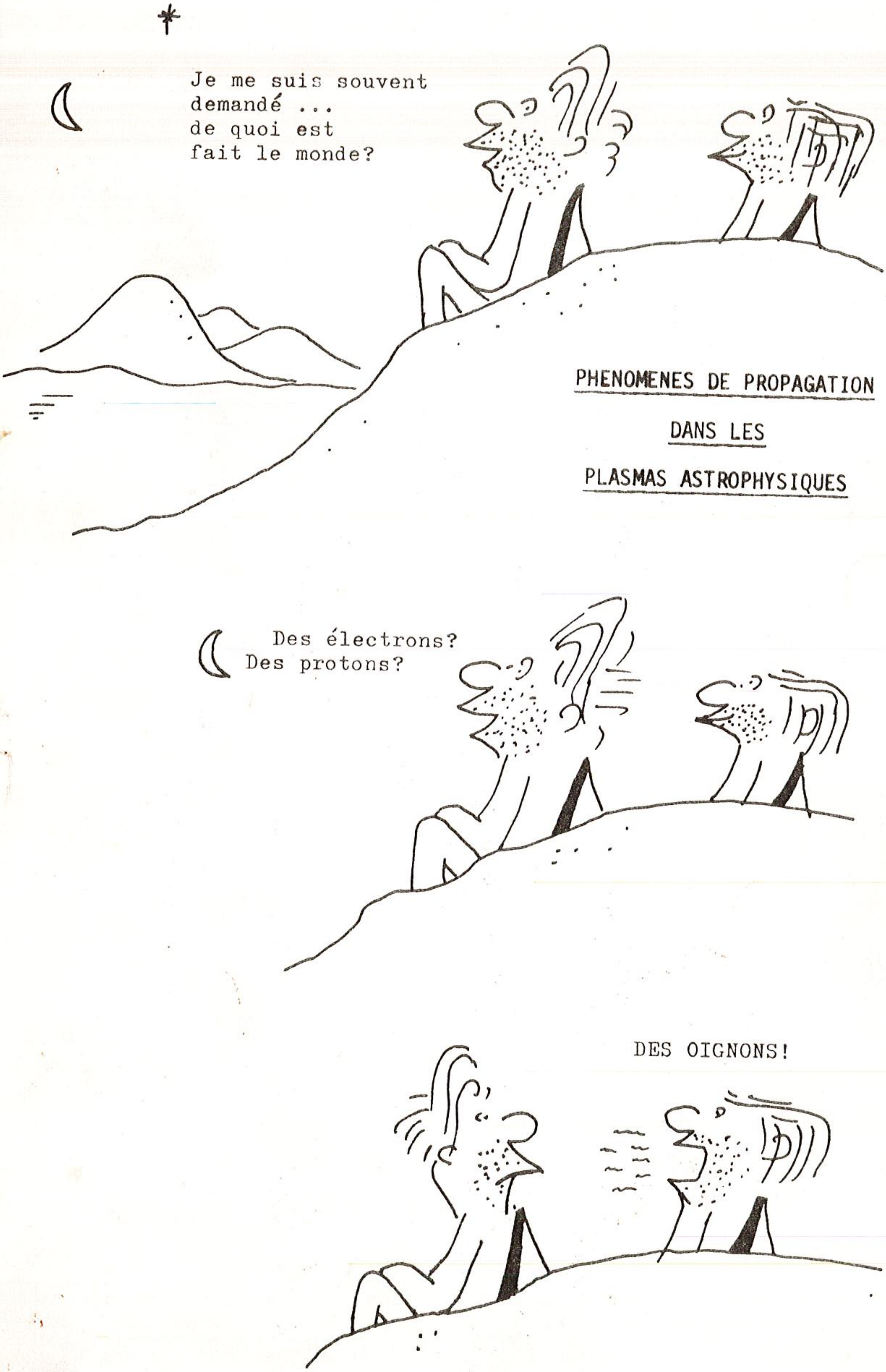
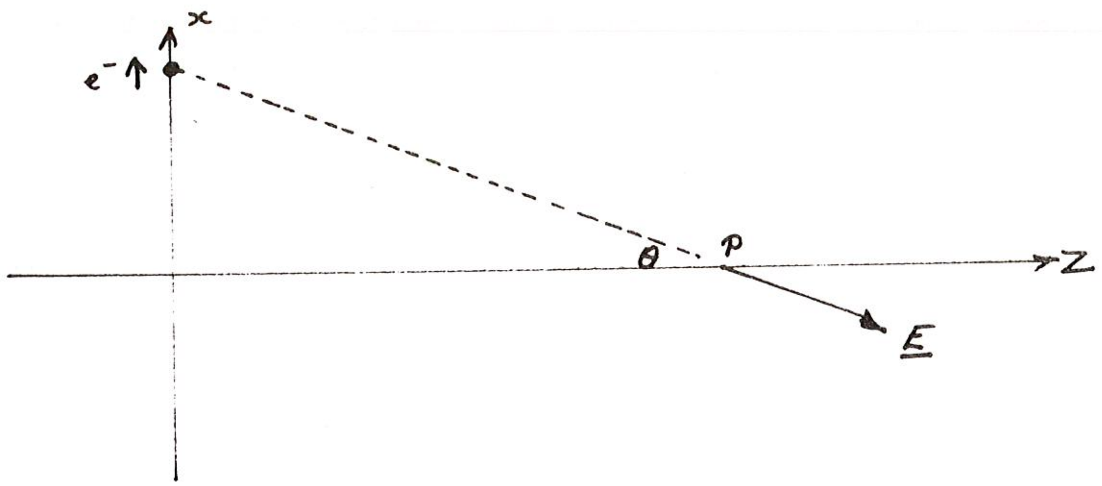
PHENOMENES DE PROPAGATION DANS LES PLASMAS ASTROPHYSIQUES



NOTIONS INTUITIVES SUR LES ONDES ELECTROMAGNETIQUES



Considérons un électron faisant des oscillations harmoniques à la fréquence ν sur l'axe de X : sa position a l'instant t est alors :

$$X(t) \propto \sin 2\pi\nu t$$

Le champ électrique E à un endroit P est dirigé dans la direction e P. Considérons les deux composantes de E :

$$E_z = E_0 \cos\theta$$

$$E_x = E_0 \sin\theta$$

Supposons que la distance Z entre l'électron et l'endroit P soit très supérieure à l'amplitude de l'oscillation de l'électron. On a alors :

$$\cos\theta \approx 1$$

$$\sin\theta \approx \theta = x(t)/Z$$

Par conséquent :

$$E_z \approx cte$$

$$E_x \propto x(t) \propto \sin(2\pi\nu t)$$

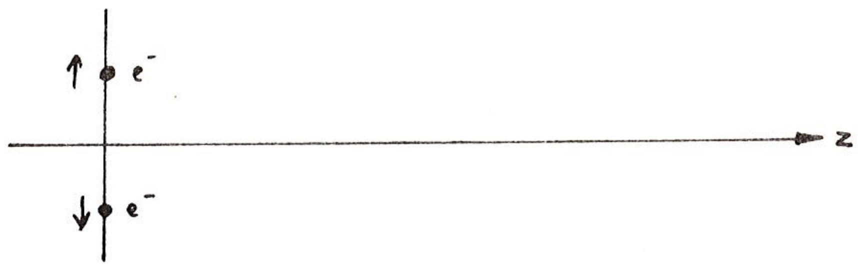
La composante le long de Z est constante et ne nous intéresse plus ; par contre, on remarque la parution d'une composante oscillatoire parallèle au mouvement de l'électron. En effet, une autre charge placée à P "sentirait" une force oscillatoire et se mettrait en mouvement oscillatoire le long de l'axe x. Ce mouvement représente une acquisition d'énergie par l'électron à P : l'énergie a été transmise par le champ électrique oscillatoire - elle est au dépens de l'électron en oscillation qui est donc amortit.

Dans le langage de électrodynamique classique, on dit que le champ oscillatoire est une onde électromagnétique, transportant de l'énergie : elle est rayonnée par l'électron oscillant. On remarque que la fréquence du rayonnement est égale à la fréquence d'oscillation de l'électron source - si lc fréquence d'oscillation ne varie pas au cours de temps, le rayonnement est monochromatique.

Un électron en mouvement harmonique est en effet un système accéléré ; on montre plus généralement à partir de la théorie de Maxwell qu'une charge électrique ayant une accélération instantanée $\underline{a}$ est une source d'ondes électromagnétiques transversales qui se propagent dans une direction perpendiculaire à $\underline{a}$.

On voit que le plan dans lequel le champ électrique varie (le vecteur de polarisation) se trouve nécessairement dans le plan de $\underline{a}$. Si le plan ne varie pas avec le temps, la polarisation est linéaire et constante ; par contre, si le plan de $\underline{a}$ varie, la polarisation varie aussi.

Question : Nous avons consideré le rayonnement émis par un électron en mouvement harmonique. Quel genre de rayonnement est émis par un ensemble de deux électrons oscillant en antiphase ? Quel est le nom d'un tel système ?



Trouver alors une condition simple pour qu'un système électronique puisse rayonner de façon importante.

Pouvez-vous généraliser (sans mathématiques!) votre résultat au cas atomique ?

RAPPEL SUR LA PROPAGATION D'UNE ONDE MONOCHROMATIQUE

Considérons l'équation

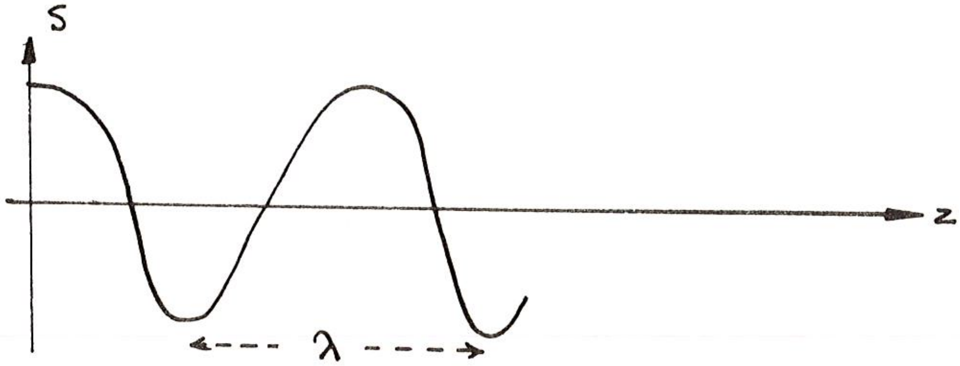
$S = S_0 \cos (Kz - \omega t)$

où t = temps

Z = distance

On remarque :

1) à un instant particulier $t = t_0$, l'amplitude de cette équation varie comme $\cos (Kz)$:



La distance entre deux maxima successifs est donnée par

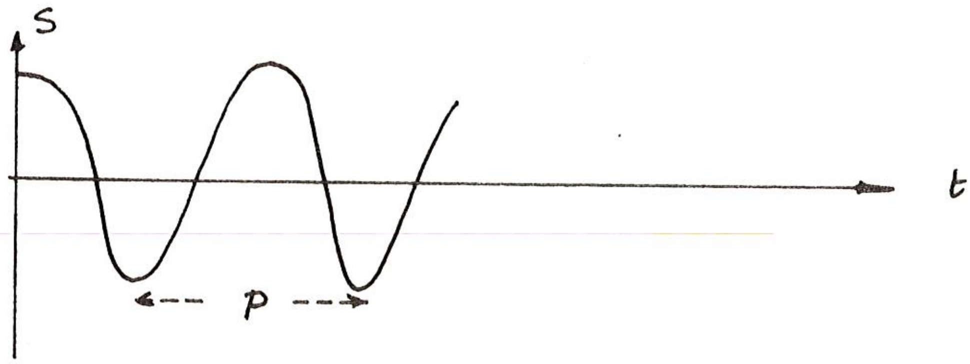
$$K \lambda = 2\pi$$

d'où
$$K = \frac{2\pi}{\lambda}$$

On appelle : λ la longueur d'onde

K le nombre d'onde

2) à un endroit particulier $Z = Z_0$, l'amplitude varie comme $\cos (\omega t)$



La durée entre deux maxima successifs est donnée par :

$$\omega p = 2\pi$$

d'où
$$\omega = \frac{2\pi}{p}$$

On appelle : p la période d'oscillation

ω la fréquence angulaire

Il est souvent commode aussi de définir la fréquence ν ;

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{P}$$

3) considérons maintenant une valeur particulière de l'amplitude ; c'est-à-dire, prenons $S(t,z) = cte$. On a alors : $\omega t - Kz = cte$.

Une solution particulière est :

$$Z = \frac{\omega}{K} t = vt$$

On voit qu'une valeur particulière de S apparaît à différents endroits ; la vitesse de propagation est v :

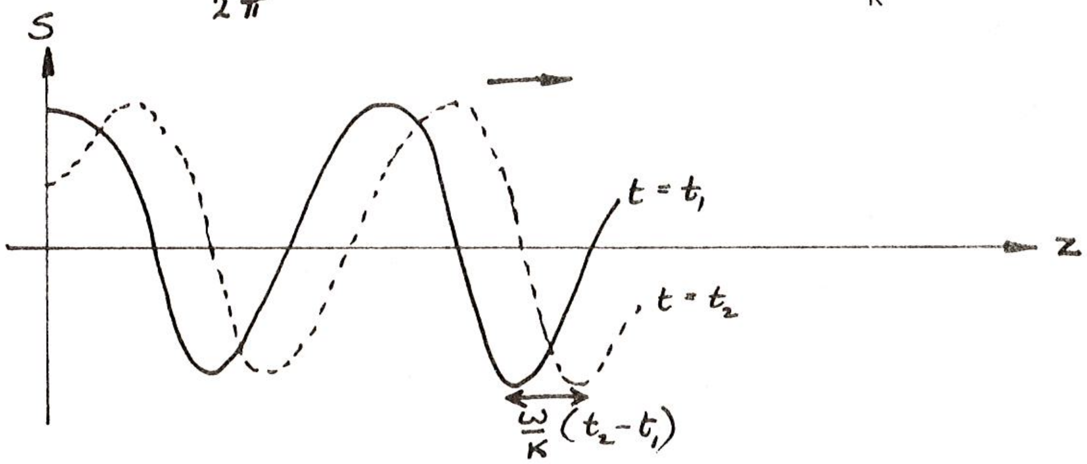
$$v = \frac{\omega}{K}$$

On appelle v la vitesse de phase.

Donc, l'équation

$$S = S_0 \cos(\omega t - Kz)$$

représente une onde harmonique monochromatique, de longueur d'onde $= \frac{2\pi}{K}$, de fréquence $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, qui se propage à une vitesse $V = \frac{\omega}{K} = \lambda\nu$



Cette onde ne change pas sa forme au cours de temps. La quantité $V = \frac{\omega}{K}$ est une grandeur déterminée par les caractéristiques physiques du milieu dans lequel se propage l'onde. Remarquons que, en général, ω est fonction de K.

Il est souvent commode d'exprimer l'équation d'onde sous forme complexe :

$$U = S_0 \, e^{i(kz - \omega t)}$$

$$= S_0 \left[\cos(Kz - \omega t) + i \sin(Kz - \omega t) \right]$$

C'est alors la partie réelle de cette équation qui représente l'amplitude de l'équation d'onde.

L'énergie transportée par une onde (ou son intensité) est égale à $|S|^2$. Quand l'équation est exprimée sous forme complexe, on voit que :

$$\text{énergie} = E = |S|^2$$
$$= U U^*$$

où : U^* = conjugé complexe de U.

RAPPEL SUR LA PROPAGATION D'UNE ONDE QUELCONQUE

On sait qu'une onde de forme quelconque peut toujours être décomposée en une série d'ondes harmoniques par le procédé de Fourier:

$$S(z,t) = \sum_{-\infty}^{\infty} s_n \cos n\,(Kz - \omega t)$$

Nous avons vu qu'une onde harmonique peut être exprimée sous forme complexe ; ce fait nous permet d'exprimer une onde arbitraire comme une série d'exponentiels :

$$U(z,t) = \sum_{-\infty}^{\infty} U_n\, e^{in(Kz-\omega t)}$$

C'est toujours la partie réelle du U qui représente l'amplitude de l'onde.

Or, au lieu d'une décomposition en harmoniques discrètes, nous pouvons aussi bien utiliser une série continue ; dans ce cas, la sommation devient un intégral et :

$$U(z,t) \propto \int_{-\infty}^{\infty} U(k)\, e^{i(kz-\omega t)}\, dk$$

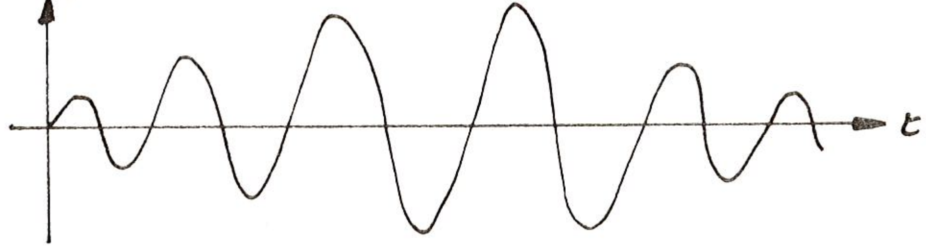
où : $U(K)$ est l'amplitude de la composante de fréquence K.
On reconnait ici l'intégral de Fourier.
Comme nous l'avons remarqué, ω est en général fonction de K :

$$\omega = \omega(K)$$

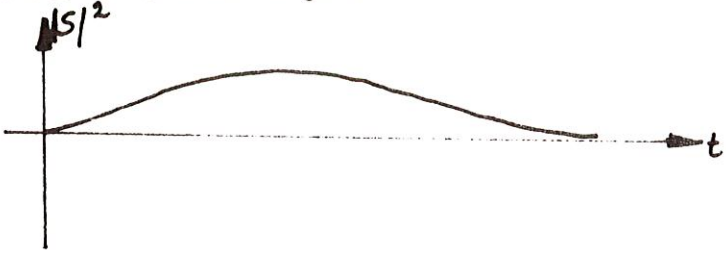
Considérons un cas particulier extrême, où la décomposition soit dominée par une valeur particulière K_0, autour de laquelle on a une distribution de nombres d'onde δK.

Deux exemples seraient :

1) une onde porteuse K_0 modulée legèrement par un ensemble d'autres fréquences $K_0 \pm \delta K$



2) un signal discontinu très large :



Dans ces cas, $\delta K \ll 1$.

$$\omega(K) = \omega_0 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial K}\right)_0 \delta K + \dots$$

$$\simeq \omega_0 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial K}\right)(K - K_0)$$

On a alors :

$$U(z,t) \propto \int_{-\infty}^{\infty} U(k)\, e^{ikz - i\left[\omega_0 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial K}\right)_0 (K-K_0)\right]t}\, dk$$

$$\propto e^{i\left[K_0 \left(\frac{\partial \omega}{\partial K}\right)_0 - \omega_0\right]t} \int_{-\infty}^{\infty} U(k)\, e^{i\left[z - \left(\frac{\partial \omega}{\partial K}\right)_0 t\right]K}\, dk$$

En mettant :

$$z' = z - \left(\frac{\partial \omega}{\partial K}\right)_0 t$$

On trouve :

$$U(z,t) \propto e^{i\left[K_0 \left(\frac{\partial \omega}{\partial K}\right)_0 - \omega_0\right]t} \int_{-\infty}^{\infty} U(k)\, e^{iz'K}\, dk$$

$$= U(z',0)\, e^{i\left[K_0 \left(\frac{\partial \omega}{\partial K}\right)_0 - \omega_0\right]t}$$

L'énergie transportée par cette onde est donnée par :

$$E = U(z,t)\, U^*(z,t)$$
$$= U(z',0)\, U^*(z',0)$$

On remarque que l'énergie à l'endroit z est égale à l'énergie à l'endroit z' ; comme

$$z' = z - \left(\frac{\partial \omega}{\partial K}\right)_0 t$$

$$= z - v_g t$$

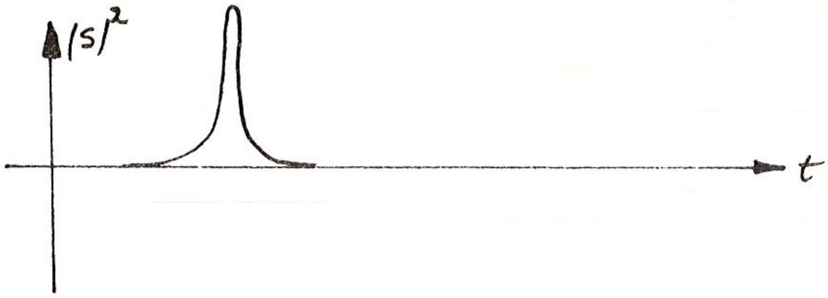
le transport de l'énergie s'est fait à la vitesse V_g :

$$V_g = \left(\frac{\partial \omega}{\partial K}\right)_0$$

On appelle V_g "la vitesse de groupe".
Cette vitesse n'est pas nécessairement égale à la vitesse de phase V des ondes harmoniques individuelles dont le signal est composé. Un détecteur réagit à l'énergie portée par une onde.

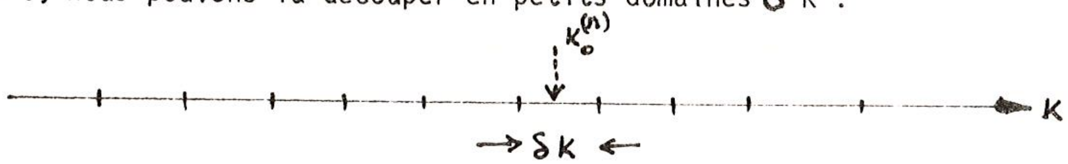
Dans le cas précédent (un signal dominé par une fréquence principale ω_{o_0} et modulé par un ensemble de fréquences telles que les nombres d'onde sont $K_0 \pm \delta K$, $\delta K \ll 1$), la forme du signal ne change pas pendant la propagation.

Considérons maintenant un autre cas extrême : celui d'un signal dont la décomposition Fourier fait intervenir une grande gamme de valeurs de K. Un exemple serait un signal de très courte durée - une pulsation.



Ici, on ne peut pas préciser une fréquence dominante - δK est en général très grande. Il s'en suit que la discussion précédente ne s'applique pas au signal dans son ensemble.

Pourtant, la distribution des fréquences est quasi- continue ; par conséquent, nous pouvons la découper en petits domaines δK :



A chaque domaine, on associe une valeur dominante de K $(K_0^{(1)}, K_0^{(2)} \ldots, K_0^{(n)} \ldots)$; ainsi, à condition de prendre δK suffisamment petit, nous allons pouvoir appliquer l'analyse précédente à chacun de groupes d'onde $K_0^{(n)} \pm \delta K$.

Nous avons vu que la vitesse de groupe d'un domaine particulier est donnée par :

$$V_g = \left(\frac{\partial \omega}{\partial K}\right)_0$$

Considérons un ensemble de domaines voisins, qui chévauche une gamme ΔK :

$$\Delta K \gg \delta K$$

Dans cet ensemble, la vitesse de groupe est variable ; en effet, on y trouve une dispersion ΔV_g de vitesses de groupe :

$$\Delta V_g = \frac{\Delta V_g}{\Delta K} \Delta K$$

$$\approx \frac{\partial v_g}{\partial K} \Delta K$$

Supposons que le signal soit émis à l'instant t = o : à t = o, l'énergie dans tous les domaines ΔK est émise simultanément. Après un temps t, les énergies dans les différents domaines ΔK se trouvent à différentes distances : dans la gamme ΔK, l'énergie sera étalée sur une distance Δl :

$$\Delta l = \Delta v_g \; t$$

$$= \frac{\partial^2 \omega}{\partial K^2} \Delta K \; t$$

On remarque que Δl croit avec t : par conséquent, un signal initialement très petit (dans le cas extrême, une fonction de Dirac) s'élargit à mesure qu'il se propage dans le milieu (une pulsation infiniment courte devient un signal très large).

Deux cas limites se présentent :

1) $\underline{\Delta K = o}$

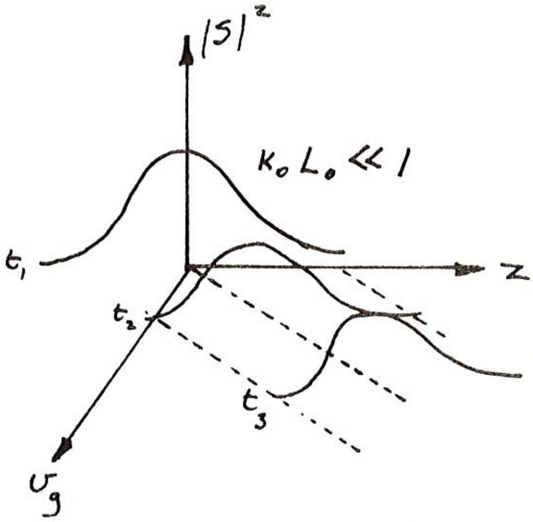
On a alors $\Delta l = o$. Un signal presque monochromatique n'est pas élargi.

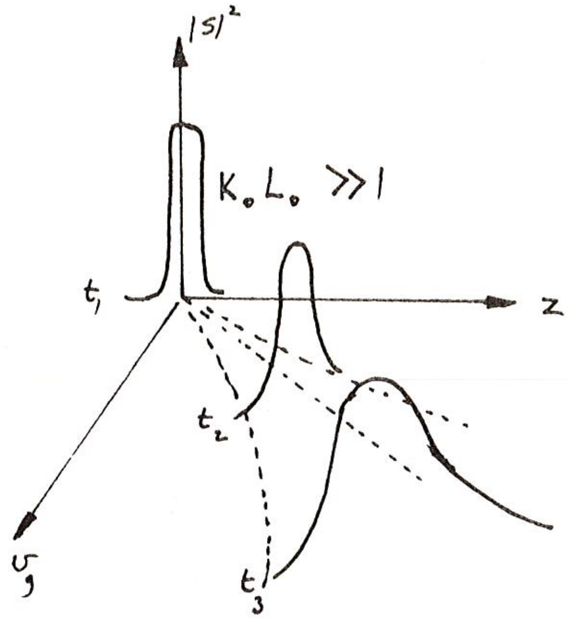
2) $\underline{\omega = V K, \text{ avec } V = \text{cte}}$

On a alors $\frac{\partial^2 \omega}{\partial K^2} = o$, d'où $\Delta l = o$, quelle que soit la valeur de ΔK.

Il n'y a pas d'élargissement (même d'une fonction de Dirac) quand la vitesse de phase est indépendante de la fréquence.

Nous avons établi la loi de propagation d'un signal non-harmonique en prenant des exemples particuliers. Plus généralement, ces relations s'appliquent à tout signal ayant une largeur spatiale L_o. On montre que, si $K_o L_o \ll 1$ pour toute composante K_o (pulsation très large), il n'y a pas d'élargissement, tandis que $K_o L_o \gg 1$ (pulsation très fine) implique un étalement.





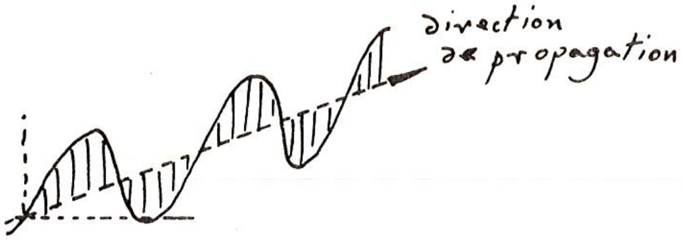
Remarquons qu'une détermination de l'étalement d'un signal nous renseigne sur la valeur de $\frac{\partial^2 \omega}{\partial K^2}$: comme $\frac{\partial^2 \omega}{\partial K^2}$ dépend des caractéristiques physiques du milieu, on peut ainsi étudier sa structure physique.

On appelle un milieu où $\partial \omega / \partial k \neq$ cte un milieu dispersif.

Question : Donner un exemple simple d'un milieu dispersif.

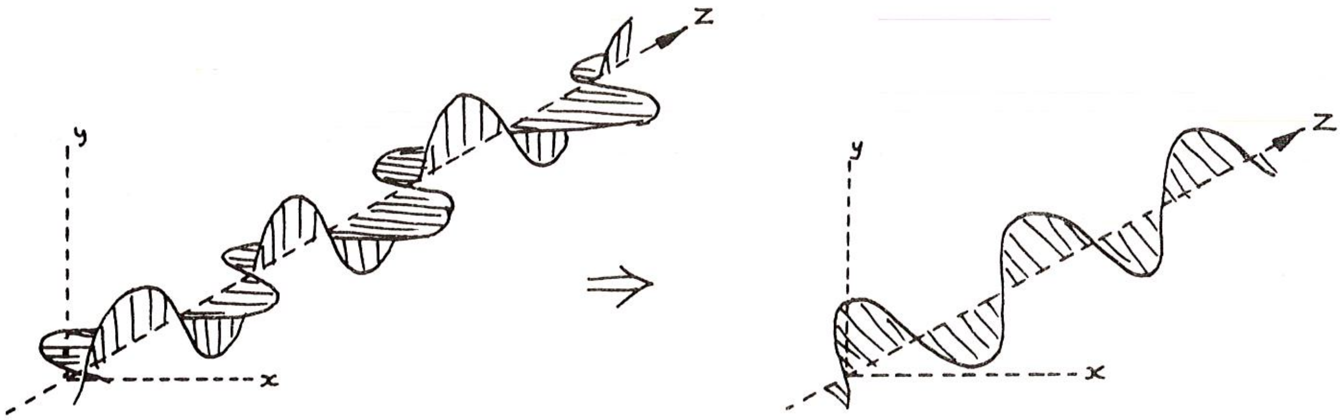
NOTION D'UNE ONDE POLARISEE

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que les ondes avec "polarisation linéaire" :



Le champ électrique varie dans un plan déterminé.

Considérons maintenant la superposition de deux ondes ayant la même phase relative et la même amplitude, mais dont les plans de polarisation sont perpendiculaires.



Comme les vecteurs sont en phase, la superposition donne une autre onde avec une polarisation linéaire, mais dont le plan se trouve entre les deux plans initiaux.

Formellement (sans oublier que c'est la partie réelle qui donne l'amplitude physique) :

$$\underline{U}_1 = \underline{\epsilon}_1 U_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

pour l'onde dont la polarisation est dans le plan y-Z.

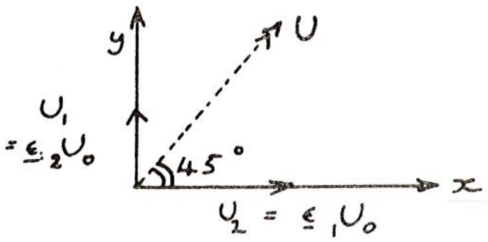
$$\underline{U}_2 = \underline{\epsilon}_2 U_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

pour l'onde dont la polarisation est dans le plan x-Z.

$\underline{\epsilon}_1$, $\underline{\epsilon}_2$ sont des vecteurs unité dans les directions y, x respectivement.

La superposition est donnée par

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = U_0 (\underline{\epsilon}_1 + \underline{\epsilon}_2)\, e^{i(kz-\omega t)}$$



Le plan de polarisation de la superposition fait 45° avec le plan x-Z.

> **QUESTION :**
>
> Si les amplitudes de deux ondes polarisées linéairement sont différentes, calculer l'angle entre le plan de polarisation de la superposition et le plan x-Z.

Considérons maintenant la superposition de deux ondes, polarisées et orientées comme avant, mais ayant une différence de phase de $\pm \pi/2$.

On a alors :

$$\underline{U}_1 = \underline{\epsilon}_2 U_0\, e^{i(kz-\omega t)}$$

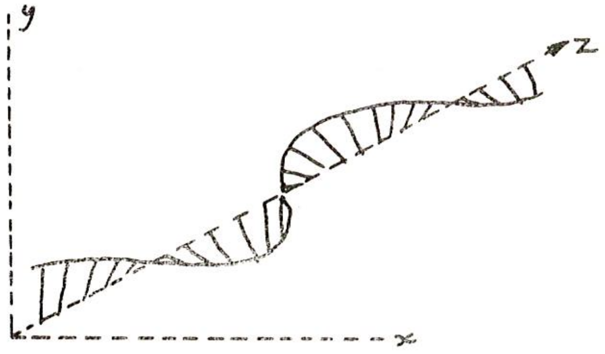
$$\underline{U}_2 = \underline{\epsilon}_1 U_0\, e^{i(kz-\omega t) \pm i\pi/2}$$

L'onde résultante est alors :

$$\underline{U} = U_0 \left[\underline{\epsilon}_1 e^{i(kz-\omega t)} + \underline{\epsilon}_2 e^{i(kz-\omega t) \pm i\pi/2} \right]$$

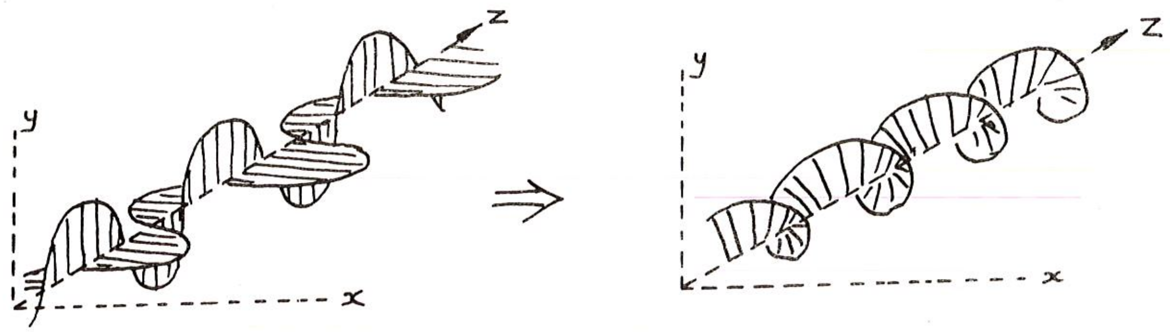
$$= U_0 \left[\underline{\epsilon}_1 \pm i\, \underline{\epsilon}_2 \right] e^{i(kz-\omega t)}$$

En prenant la partie réelle de cette expression, on remarque que la direction du vecteur $\underline{U}$ varie au cours du temps ; pourtant, son amplitude reste



constante. Par conséquent, pendant une période d'oscillation, le vecteur $\underline{U}$ décrit un cercle dans le plan x-y.

On dit que ce type d'onde est polarisé circulairement ; selon le signe de $\underline{\epsilon}_2$ (ou le signe de $\pi/2$), le vecteur $\underline{U}$ tourne dans le sens d'un tire-bouchon (polarisation circulaire à droite) ou dans le sens opposé (polarisation circulaire à gauche).



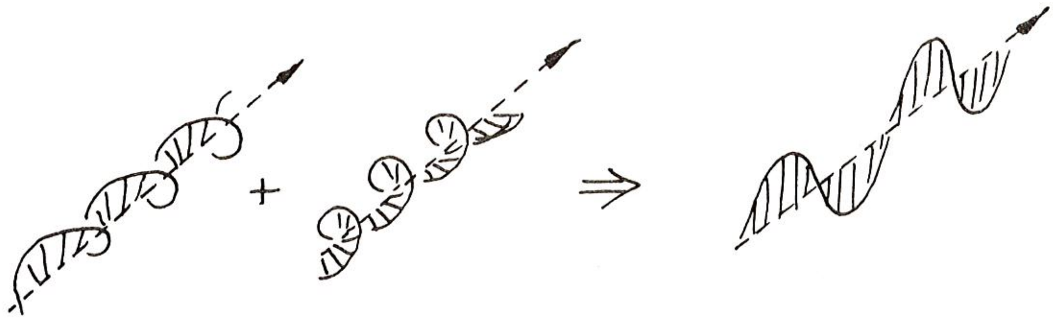
Nous avons établi la notion d'une onde polarisée circulairement à partir d'une superposition des ondes avec polarisation linéaire. Remarquons qu'il n'y avait aucune raison fondamentale (sinon pédagogique) de procéder de cette manière. On aurait pu aussi bien commencer avec deux ondes polarisées circulairement à gauche et à droite, respectivement, ayant la même phase et la même amplitude :

$$\underline{U}_+ = \frac{U_0}{2} e^{i(kz-\omega t)} (\underline{\epsilon}_1 + i\,\underline{\epsilon}_2)$$

$$\underline{U}_- = \frac{U_0}{2} e^{i(kz-\omega t)} (\underline{\epsilon}_1 - i\,\underline{\epsilon}_2)$$

On voit que la somme de ces deux ondes nous restitue $\underline{U}_1$, une onde polarisée linéairement :

$$\underline{U}_+ + \underline{U}_- = \underline{\epsilon}_1 \, U_o \, e^{i(kz-\omega t)}$$



De façon plus générale, considérons deux ondes, polarisées circulairement à gauche et à droite respectivement, ayant la même amplitude mais ayant une phase relative ϕ.

$$\underline{U}_+ = \frac{U_o}{2} \, e^{i(kz-\omega t)} (\underline{\epsilon}_1 + i\underline{\epsilon}_2)$$

$$\underline{U}_- = \frac{U_o}{2} \, e^{i(kz-\omega t)+i\phi} (\underline{\epsilon}_1 - i\underline{\epsilon}_2)$$

$$= \frac{U_o}{2} (\underline{\epsilon}_1 - i\underline{\epsilon}_2)(\cos\phi + i\sin\phi) \, e^{i(kz-\omega t)}$$

$$= \frac{U_o}{2} \left[(\underline{\epsilon}_1 \cos\phi + \underline{\epsilon}_2 \sin\phi) + i(\underline{\epsilon}_2 \cos\phi - \underline{\epsilon}_1 \sin\phi) \right]$$

$$\times \, e^{i(kz-\omega t)}$$

La superposition s'écrit :

$$\underline{U} = \underline{U}_+ + \underline{U}_-$$

$$= \frac{U_0}{2}\left[\left(\underline{\epsilon}_1 + \underline{\epsilon}_1 \cos\phi + \underline{\epsilon}_2 \sin\phi\right) + i\left(\underline{\epsilon}_2 + \underline{\epsilon}_2 \cos\phi - \underline{\epsilon}_1 \sin\phi\right)\right] \times e^{i(Kz-\omega t)}$$

L'amplitude de l'onde qui en résulte est la partie réelle de cette expression :

$$Re(\underline{U}) = \frac{U_0}{2}\Big[\left(\underline{\epsilon}_1 + \underline{\epsilon}_1 \cos\phi + \underline{\epsilon}_2 \sin\phi\right)\cos(Kz-\omega t) - \left(\underline{\epsilon}_2 + \underline{\epsilon}_2 \cos\phi - \underline{\epsilon}_1 \sin\phi\right)\sin(Kz-\omega t)\Big]$$

Les composantes U_1 et U_2 sont alors données par :

$$U_1 = \frac{U_0}{2}\left[(1+\cos\phi)\cos(Kz-\omega t) + \sin\phi \sin(Kz-\omega t)\right]$$

$$= \frac{U_0}{2}\left[\cos(Kz-\omega t) + \cos(Kz-\omega t - \phi)\right]$$

$$= U_0 \cos\frac{\phi}{2} \cos\left(Kz-\omega t - \frac{\phi}{2}\right)$$

$$U_2 = \frac{U_0}{2}\left[\sin\phi \cos(Kz-\omega t) - (1+\cos\phi)\sin(Kz-\omega t)\right]$$

$$= \frac{U_0}{2}\left[\sin(Kz-\omega t-\phi) - \sin(Kz-\omega t)\right]$$

$$= U_0 \sin\frac{\phi}{2} \cos\left(Kz-\omega t - \frac{\phi}{2}\right)$$

On remarque que les deux composantes sont en phase ; par conséquent, la supeposition est polarisée linéairement. Pourtant, les amplitudes sont différentes : par conséquent, le plan de la polarisation fait un angle $\tan^{-1}\left(\tan\frac{\phi}{2}\right) = \frac{\phi}{2}$ avec le plan X-Z.

Nous remarquons alors que la superposition de deux ondes d'amplitude égale polarisées circulairement en sens opposés est équivalente à une onde polarisée linéairement : la phase relative des deux composantes donne l'orientation du plan de polarisation.

La décomposition d'une onde quelconque en ondes polarisées linéairement est aussi valable qu'une décomposition en ondes polarisées circulairement : le choix des ondes de base est déterminé par commodité (cf. le choix des fonctions de base dans la mécanique quantique).

NOTIONS ELEMENTAIRES SUR LES PLASMAS

A l'échelle macroscopique, la matière est électriquement neutre.

A l'échelle microscopique, deux cas extrêmes se présentent.

1) Tous les électrons sont liés aux noyaux et il n'y a pas d'électrons ou ions libres. Or, la force de liaison entre électrons et ions est proportionnelle à e^2/r^2, r étant le "noyau atomique" $\approx 10^{-8}$ cm. Il s'ensuit que si l'énergie thermique des atomes est supérieure au potentiel électrostatique ($\propto \frac{e^2}{r}$) les électrons seront arrachés des atomes et le milieu deviendra ionisé ; la condition s'exprime par (dans le cas de l'atome d'hydrogène) :

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} k T_{limite} < \frac{e^2}{2r}$$

d'où :

$$T_{limite} \lesssim 10^5 \text{ K}$$

2) Les électrons sont libres : le milieu est composé d'électrons libres et d'ions. Cet état peut être produit si on chauffe le milieu à une température $\gtrsim 10^5$K. On peut ioniser un milieu aussi :

- par éclairement avec un rayonnement électromagnétique dont la fréquence est telle que :

$$h\nu \gg \frac{e^2}{2r}$$

- par bombardement avec un faisceau de particules dont les énergies cinétiques E_c sont telles que :

$$E_c \gg \frac{e^2}{2r}$$

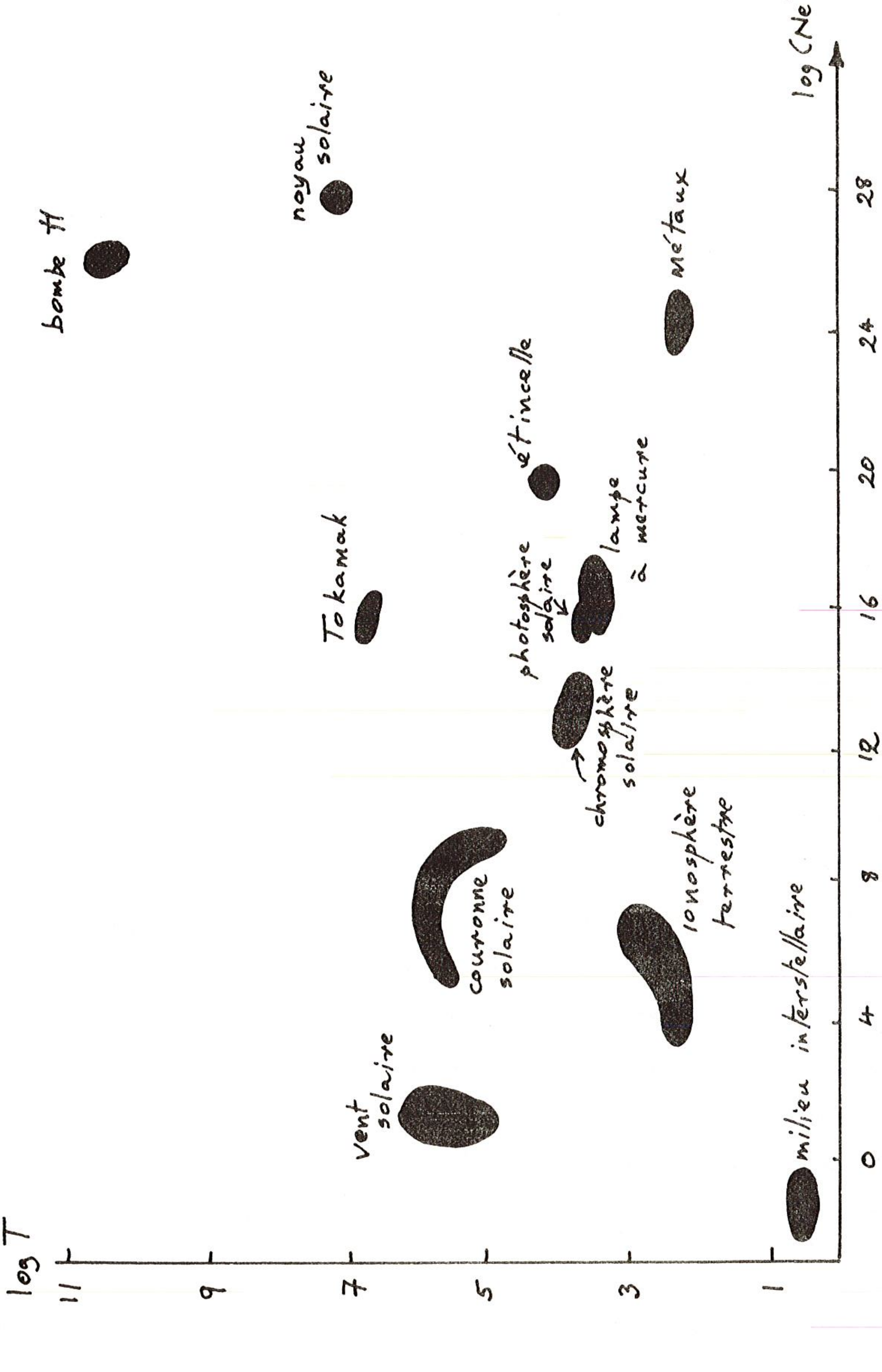
Remarquons qu'un milieu, une fois ionisé par une méthode ou une autre, peut rester ionisé à une température inférieure à 10^5K : il suffit que sa densité soit si faible que la probabilité d'une collision électron-ion ("probabilité de recombinaison") soit négligeable.

Un milieu contenant des électrons et des ions libres s'appelle un plasma.

En ce qui concerne son interaction avec une onde électromagnétique, un plasma ne se comporte pas comme un gaz neutre ; le comportement ressemble plutôt à celui d'un conducteur (qui possède des électrons "quasi-libres"), et beaucoup de ses caractéristiques physiques (par exemple, son indice de réfraction) sont calculés de façon analogue.

Les plasmas (partiellement ou totalement ionisés) sont très répandus dans l'Univers ; de plus, on les trouve presque toujours en présence d'un champ magnétique. Citons-en quelques exemples :

1) ionosphère de la Terre : à environ 100 km d'altitude, la densité de l'atmosphère est de l'ordre de 10^{14} particules cm^{-3}, et la température est de l'ordre de 900 K.


log T
1
3
5
7
9
11
log (Ne)
0
4
8
12
16
20
24
28
milieu interstellaire
vent solaire
couronne solaire
ionosphère terrestre
chromosphère solaire
photosphère solaire
lampe à mercure
étincelle
Tokamak
métaux
bombe H
noyau solaire

Pendant la journée, la densité électronique est de l'ordre de 10^5 électrons cm^{-3} : une fraction d'environ $10^5/10^{14} \approx 10^{-9}$ des atomes est ionisée. L'ionisation est due essentiellement aux rayons X et au rayonnement ultra-violet solaire ($\lambda \approx 800$ Å - 1026 Å) ; pendant la nuit, la densité électronique à cette altitude peut descendre jusqu'à 10^3 el. cm^{-3}.

2) Le Soleil : à part la couche superficielle du Soleil (la photosphère), dont la température est d'environ 6000°K, la matière solaire est un plasma. Au centre, où la température et la densité sont respectivement d'environ 10^7K et 100 g cm^{-3}, le plasma est complètement ionisé. Il est de même dans la couronne solaire, où la température est de quelques millions de degrés Kelvin et la densité est de quelques fois 10^8 particules cm^{-3}.

3) Espace interplanétaire : le gaz interplanétaire est complètement ionisé Sa température et sa densité décroissent régulièrement du Soleil vers le bord du système solaire -il est en quelque sorte un prolongement de la "haute atmosphère" du Soleil. Dans le voisinage de la Terre, sa densité est de l'ordre de 10 particules cm^{-3} (5 électrons, 5 protons) et sa température est de l'ordre de 10^5K (mais attention, quel est le sens de "température" pour un milieu aussi ténu ? Est-elle nécessairement la même pour les électrons et les protons ?). La distribution n'est pas homogène -il y a des variations de l'ordre de 100% dans la densité électronique, sur une échelle de distance de l'ordre de 10^6 km.

4) Espace interstellaire : moyennée sur une ligne de visée de quelques kpc, la densité électronique est d'environ .03 el cm^{-3}, avec des variations de 100% sur une échelle de distance de l'ordre de 10^{11} cm. Le plasma interstellaire n'est pas complètement ionisé : il y a typiquement 1 particule cm^{-3},

et donc seulement 3% des particules sont ionisées. Pourtant, dans certaines régions, surtout dans le voisinage d'étoiles très chaudes ($T \gtrsim 40\,000°K$), l'ionisation peut être complète.

Dans la suite, nous allons souvent utiliser trois grandeurs caractéristiques d'un plasma.

1) Libre parcours moyen d'un électron λ_e : c'est la distance typique traversée par un électron libre avant de rencontrer un ion. Il est exprimé par

$$\lambda_e = v_e / \nu_i$$

où : v_e = vitesse typique d'un électron

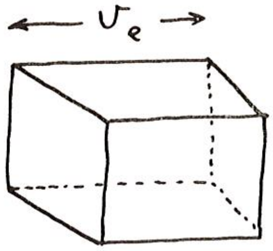
ν_i = fréquence de collision des électrons avec les ions.

Remarquons que, par "collision", nous entendons ici toute "interaction" après laquelle la direction et l'énergie de l'électron sont changées. Les "collisions" peuvent être directes -pourtant, comme la dimension d'un ion est très faible ($\approx 10^{-13}$ cm pour un proton), la fréquence des collisions directes sera très faible aussi. Les "collisions" peuvent être indirectes -un électron et un ion interagissent par la force électrostatique et donc un ion peut influer sur l'état d'un électron qui passe dans son voisinage. Ce voisinage représente la dimension "effective" de l'ion envers une interaction avec un électron -elle est beaucoup plus grande que le rayon géométrique de l'ion. Pour estimer (à un ordre de grandeur près) cette dimension effective, nous allons supposer qu'un électron est effectivement dévié par un ion à distance r quand son énergie thermique est inférieure au potentiel électrostatique entre l'électron et l'ion. On aura alors :

$$\frac{e^2}{r} = \frac{m v_e^2}{2} = \frac{3}{2} k T$$

où : T = température du milieu.

Donc, nous allons considérer qu'un électron "interagit" avec un ion quand sa distance à celui-ci est inférieure à $r = 2e^2/3KT$.



Considérons maintenant un électron incident à vitesse V_e sur 1 cm^2 de surface du milieu.

Pendant une seconde, il va traverser V_e cm du milieu, ce qui correspond à un volume. de $V_e cm^3$. Donc, le nombre d'ions avec lesquels l'électron aurait pu interagir est $N_i V_e$, où N_i est le nombre d'ions par cm^3. Or, l'électron peut interagir seulement quand il est à la distance r d'un ion : cette distance correspond à une surface $\sigma = \pi r^2$ ("la section efficace") perpendiculaire à la direction du mouvement de l'électron. L'ensemble d'ions dans le volume $V_e cm^3$ correspond alors à une surface totale projetée égale à $N_i V_e \sigma$ cm^2. Cette surface représente la fraction $N_i V_e \sigma /1$ de la surface autour de l'électron incident ; par conséquent, la probabilité de "rencontrer" un ion est égale à $N_i V_e \sigma$.

Le calcul a été fait pour une durée de "vol" de 1 seconde : par conséquent, ce résultat est aussi le nombre de collisions par seconde, soit la fréquence de collision ν_i :

$$\nu_i \simeq N_i v_e \sigma$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\lambda_e &= v_e / \nu_i \\
&= v_e / N_e v_e \sigma \\
&= \frac{9k^2}{4\pi e^4} \frac{T^2}{N_i} \\
&\approx 10^4 \frac{T^2}{N_i} \text{ cm}
\end{aligned}$$

Comme en général un plasma est neutre :

$$N_e = N_i$$

d'où :

$$\lambda_e \approx 10^4 \frac{T^2}{N_e}$$

On remarque que le libre parcours moyen est fonction non seulement de la densité électronique, mais aussi de la température.

QUESTION :

Estimer le libre parcours moyen d'un électron dans la couronne solaire, dans ionosphère de la Terre et dans le milieu interplanétaire. Qu'en concluez-vous sur l'application de l'hydrodynamique à ces trois milieux ?

Le libre parcous moyen est une grandeur essentielle pour les calculs de la conductibilité thermique et électrique d'un plasma (pourquoi ?)

2) Le rayon de giration : si le plasma se trouve dans un champ magnétique B, les mouvements des particules chargées seront des hélices de rayon r_B autour des lignes de force.

On montre que :

$$r_B = v/\omega_B$$

où :

v = vitesse

ω_B = fréquence de Larmor

$= eB/mc$

Or :

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2} k T$$

d'où :

$$r_B = \frac{(3kT/m)^{1/2}}{eB/mc}$$

$$= \frac{(3kTmc^2)^{1/2}}{eB}$$

$$\approx 1.3 \times 10^{12} m^{1/2} T^{1/2}/B \quad \text{cm}$$

si : m est exprimée en g

B " " en gauss.

On remarque que le rayon de Larmor est fonction de la masse des particules chargées.

Pour les électrons :

$$r_B^e \approx .04 \frac{T^{1/2}}{B} \quad \text{cm}$$

Pour les protons :

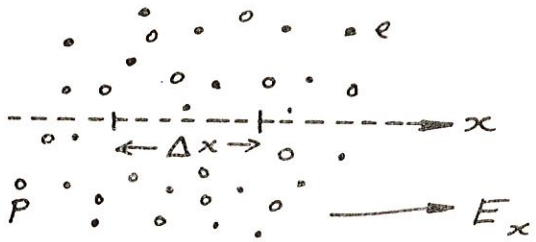
$$r_B^p \approx 1.6 \frac{T^{1/2}}{B} \quad \text{cm}$$

QUESTION :

Estimer le rayon de Larmor des électrons dans le milieu interplanétaire à la distance orbitale de la Terre (on suppose que $B \approx 6\ 10^{-5}$ gauss).

Comparez avec le libre parcours moyen. Quelle est votre conclusion maintenant concernant l'application éventuelle de l'hydrodynamique au milieu interplanétaire -à quelle échelle de distances peut-on l'appliquer ?

3) <u>Fréquence de plasma :</u> Considérons un élément d'épaisseur Δx d'un plasma neutre, dont la densité électronique est N_e cm^{-3}.



Supposons qu'à un moment donné, un champ électrique de valeur E_x, dirigé le long de x, soit appliqué.

La force sur les particules chargées due au champ est $\pm eE_x$: elles vont donc se déplacer. Pourtant, comme les électrons sont d'environ 10^4 fois moins massifs que les ions positifs, l'effet du champ sera beaucoup plus important pour eux que pour les ions : par conséquent, nous pouvons dans une première approximation négliger le mouvement des ions.

Sous l'effet du champ, les électrons vont se déplacer sur une distance Δr par rapport aux ions : nous allons étudier ce mouvement.

Comme le volume occupé par les électrons change, la densité électronique passe de N_e à N_e' :

$$N_e' = N_e \frac{\Delta x}{(\Delta x - \Delta r)}$$

$$= N_e \frac{1}{1 - \frac{\Delta r}{\Delta x}}$$

$$\approx N_e \left(1 + \frac{\Delta r}{\Delta x}\right) \qquad si \ \Delta r \ll \Delta x$$

La densité de charge ρ_c fut initialement zéro (plasma neutre) ; sous l'effet du champ électrique, la densité de charge prend la valeur ρ_c' :

$$\rho_c' = e N_i - e N_i'$$

$$= e N_e - e N_e - e N_e \frac{\Delta r}{\Delta x}$$

$$= - e N_e \frac{\Delta r}{\Delta x}$$

$$\approx - e N_e \frac{dr}{dx}$$

où N_i est la densité d'ions = N_e.

Or, selon Maxwell :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = - 4 \pi \times (\text{densité de charge})$$

$$= 0 \quad \text{initialement}$$

$$= - 4\pi e N_e \frac{dr}{dx} \quad \text{après la perturbation}$$

Comme le champ est appliqué dans la direction de $-x$ (d'où vient le signe ?)

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = - \frac{dE}{dx}$$

Par conséquent :

$$- \frac{dE}{dx} = - 4 \pi e N_e \frac{dr}{dx}$$

Donc :

$$E_x = 4 \pi e N_e r$$

(pourquoi la constante d'intégration est-elle nulle ?)

Comme les électrons sont séparés des ions, il apparaît une force de rappel F_x :

$$F_x = - e E_x = - 4 \pi e^2 N_e r$$

Donc, l'équation du mouvement des électrons est donnée par :

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = - 4 \pi e^2 N_e r$$

Le mouvement est celui d'un oscillateur harmonique ; la solution est :

$$r = r_o e^{-i \omega_n t}$$

où :

$$r_o = \text{amplitude d'oscillation}$$

$$\omega_n = \left(\frac{4 \pi e^2 N_e}{m} \right)^{1/2}$$

On appelle la quantité

$$f_n = \omega_n / 2\pi = \left(\frac{e^2 N_e}{m} \right)^{1/2} = 9 \times 10^3 N_e^{1/2} \quad s^{-1}$$

la fréquence du plasma : c'est la fréquence à laquelle les électrons d'un plasma neutre oscillent autour des ions si on les perturbe.

La fréquence de plasma est une grandeur très importante : elle intervient souvent -par exemple, on la retrouve dans tout calcul relatif à la propagation des ondes électromagnétiques.

QUESTION :
Considérons la propagation d'une onde électromagnétique ayant une fréquence f égale à f_n à travers un plasma.
Quel phénomène va se produire ?

NOTIONS INTUITIVES SUR LA PROPAGATION DES ONDES e-m DANS UN PLASMA

Une onde électromagnétique monochromatique est en effet un champ électrique harmonique de fréquence angulaire $\omega = 2\pi f$

$$E = E_o \cos \omega t = E_o \cos 2\pi f t$$

Nous avons vu qu'un champ électrique perturbe les électrons et ils tendent à osciller autour des ions. Or, dans le cas d'une onde électromagnétique, la perturbation est elle-même oscillatoire ; il s'en suit que l'équation du mouvement des électrons est :

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -4\pi e^2 N_e r - e E_o \cos \omega t$$

Essayons une solution du type :

$$r = r_o \cos \omega t$$

Nous trouvons que

$$r_o = \frac{e E_o}{m(\omega^2 - \omega_n^2)}$$

On reconnaît l'équation et la solution d'un résonateur à oscillations forcées : remarquons la présence de la fréquence de plasma.

QUESTION :

Selon cette solution, si la fréquence de l'onde incidente est égale à la fréquence de plasma, les électrons oscillent avec une amplitude infiniment grande. Ce résultat, vous paraît-il raisonnable ? Quels phénomènes a-t-on négligés ?

Nous voyons qu'il y a transfert d'énergie de l'onde incidente aux électrons du milieu ; l'importance de cet échange est chiffré par la valeur de l'amplitude de l'oscillation et donc par les valeurs relatives de ω et ω_n.

Un électron accéléré rayonne des ondes électromagnétiques ; en particulier, les électrons en oscillation harmonique émettent un rayonnement à la fréquence de leur oscillation. Par conséquent, le plasma "agité" par le rayonnement incident émet des ondes à la même fréquence que le rayonnement, mais décalée en phase. Le rayonnement résultant est la superposition de ces deux ondes.

Le déphasage relatif, et donc de l'émission résultante, est fonction des valeurs relatives de ω et ω_n ; 3 cas extrêmes se présentent.

1) $\omega \gg \omega_n$: l'amplitude des ondes rayonnées par les électrons est faible -le rayonnement incident passe à travers le plasma essentiellement sans atténuation. Le plasma est donc "transparent" aux fréquences $\omega \gg \omega_n$.

2) $\omega \approx \omega_n$: les oscillations électroniques sont très importantes. Les phénomènes d'amortissement (que nous avons négligés dans la formulation mathématique du problème) dominent et l'énergie des électrons est transformée rapidement en chaleur. Le plasma devient donc "opaque" au rayonnement incident et se réchauffe à ses dépens.

3) $\omega \ll \omega_N$: l'onde "transmise" est très faible, mais par contre les ondes rayonnées dans le sens opposé à la direction incidente atteignent l'amplitude du rayonnement incident -le plasma devient un "miroir" presque parfait.

Ce comportement qualitatif peut être mis en évidence quantitativement en calculant l'indice de réfration du plasma envers une onde électromagnétique de fréquence ω.

QUESTION :

Sous quelle forme doit-on exprimer l'indice de réfraction d'un milieu pour tenir compte des phénomènes d'absorption et de réflexion ?

Propagation des ondes électromagnétiques dans un plasma

Nous avons déjà fait remarquer qu'une onde monochromatique qui se propage sur l'axe Z peut être exprimée sous forme complexe:

$$U = U_o e^{i(Kz - \omega t)}$$

La vitesse de propagation esr donnée par:

$$v = \omega / K$$

La valeur de ω/k pour un milieu donné est calculée à partir des équations de Maxwell: on montre que:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{\epsilon^{1/2}}$$

où

$$c = 3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$$

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi$$

On reconnait l'indice de réfraction du milieu, ϵ ; sa valeur est 1 dans le vide.

χ est la susceptibilité diélectrique du milieu, elle est donnée par:

$$\chi = P/E$$

où

E = champ électrique appliqué

P = moment dipolaire électrique (par unité de volume) induit par le champ E.

Remarquons que, définie ainsi, la susceptibilité diélectrique peut être complexe; par conséquent, ω/K peut être complexe aussi, ce qui introduit dans l'équation d'onde un facteur d'amortissement. Donc, quand la susceptibilité diélectrique devient complexe, le milieu absorbe (partiellement ou complètement) le rayonnement incident.

La "recette" pour calculer l'indice de réfraction d'un milieu quelconque se réduit toujours au calcul du moment dipolaire induit par le champ électrique qui traverse le milieu.

Considérons un plasma, fréquence angulaire de plasma ω_n, sans collisions entre les particules. Nous avons vu que les électrons réagissent à un champ électrique oscillatoire $E = E_o \cos wt$ comme un résonateur à oscillations forcées: leur équation de mouvement est

$$r = r_o \cos \omega t$$

où

$$r_o = \frac{e}{m_e} \frac{E_o}{(\omega^2 - \omega_n^2)}$$

Or, le moment bipolaire d'un système électron-ion de dimension r est $-er$. S'il y a N_e couples électron-ion par unité de volume, le moment bipolaire par unité de volume est donné par:

$$P = -e r N_e$$

$$= -\frac{e^2 N_e}{m} \frac{E}{(\omega^2 - \omega_n^2)}$$

Donc:

$$\chi = P/E$$

$$= -\frac{e^2 N_e}{m(\omega^2 - \omega_n^2)}$$

d'où:

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N_e}{m(\omega^2 - \omega_n^2)}$$

$$= 1 - \frac{\omega_n^2}{(\omega^2 - \omega_n^2)}$$

Nous trouvons alors que la vitesse de phase d'une onde électromagnétique dans un palsma sans collisions est donnée par:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\left[1 - \omega_n^2/[\omega^2 - \omega_n^2]\right]^{1/2}}$$

Question: Considérer les 4 cas suivants:

(a) $\omega \to 0$

(b) $\omega \ll \omega_n$

(c) $\omega \approx \omega_n$

(d) $\omega_n \to 0$

Quels phénomènes remarquez-vous? Etes-vous surpris? Expliquez.

Question: Le résultat que nous avons trouvé est (presque) valable pour les électrons de conduction d'un métal. Quel est l'ordre de grandeur de ω_n/ω pour un métal dans le domaine spectral du visible?

Expliquez ainsi pourquoi un métal réfléchit la lumière. Expliquez aussi pourquoi le verre est transparent.

Comme nous l'avons vu, la fréquence de plasma s'exprime par:

$$f_n \approx 9 \times 10^3 N_e^{1/2} \text{ Hz}$$

Les plasmas astrophysiques sont souvent très ténus (tout au moins, les plasmas interstellaires et interplanétaires). Par conséquent, dans le domaine radio au-delà d'environ 100 kHz, $\omega_n / \omega \ll 1$

Dans cette limite:

$$\frac{\omega}{K} \approx \frac{c}{\left[1 - \omega_n^2/\omega^2\right]^{1/2}}$$

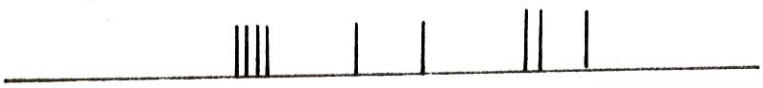
d'où:

$$c k = \left[\omega^2 - \omega_n^2\right]^{1/2}$$

On remarque que, dans cette limite, la vitesse de phase est supérieure à c, la vitesse de la lumière dans le vide. Cela n'est pas gênant: le calcul a été fait pour une onde monochromatique. En effet une telle onde ne peut pas transporter de "l'information" d'un endroit à un autre, parce que son amplitude ne change pas. Or, la relativité restreinte n'interdit pas l'apparition dans une équation des vitesses supérieures à c: elle exige seulement que la vitesse à laquelle une information se propage soit inférieure ou égale à c. On sait qu'une onde qui transporte de l'information ne peut pas être monochromatique: on peut citer à titre d'exemple:

a/ une onde "porteuse" sinusoïdale modulée en amplitude par "l'information".

b/ une suite de pulsations discrètes.



"L'information "est représentée par le nombre de pulsations qui se trouvent dans un intervalle de temps donné (information "digitalisée").

Dans ces deux cas (et tout autre qu'on puisse imaginer), l'onde est une superposition d'ondes harmoniques. Or, nous avons déjà vu que dans un tel cas, l'énergie (la réalisation technique de "l'information") est propagée à la vitesse de groupe v_g :

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial K}$$

Dans le cas de notre plasma $(\omega \gg \omega_n)$:

$$c^2 K^2 = \omega^2 - \omega_n^2$$

d'où:

$$2 c^2 K \, dk = 2 \omega \, d\omega$$

Par conséquent:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega}$$

$$= c\left[1 - \frac{\omega_n^2}{\omega^2}\right]^{1/2} \approx c\left[1 - \frac{\omega_n^2}{2\omega^2}\right]$$

Nous voyons que la vitesse de groupe est inférieure à la vitesse de lumière dans le vide.

Un plasma est alors un milieu dispersif; soulignons l'analogie entre l'équation de propagation d'ondes radio dans un plasma ténu et celle dans un guide d'onde ayant une fréquence de coupure ω_n.

Considérons un signal, ayant la forme d'une pulsation, incident à temps t = O sur un plasma; un récepteur sensible au domaine de fréquences $\omega \pm \delta\omega$ se trouve à une distance L dans le plasma. Comme nous l'avons déjà vu, le signal initial peut être décomposé en plusieurs domaines spectraux centrés sur des fréquences particulières; chaque domaine spectral se présente comme une pulsation (puisqu'il est composé de plusieurs fréquences), dont la vitesse de propagation à travers le plasma est donnée par la vitesse de groupe des fréquences contenues dans le domaine spectral en question.

En particulier, le récepteur sensible à $\omega \pm \delta\omega$ enregistre l'arrivée du signal à un temps t:

$$t = L / v_g$$

$$= c\left[1 + \frac{\omega_n^2}{2\omega^2}\right] L$$

Par rapport à la propagation dans le vide, cela représente un retard Δt :

$$\Delta t = \omega_n^2 L / 2\omega^2$$

$$= \frac{2\pi e^2 N_e L}{m \omega^2}$$

Une série de récepteurs à la même distance mais sensibles aux différents domaines spectraux enregistrent l'arrivée du signal aux instants différents, ce qui nous permet de déterminer la quantité $N_e L$. On l'appelle "la mesure de dispersion"; elle est souvent indiquée par DM :

$$\Delta t = \frac{2\pi e^2}{m\omega^2} DM$$

$$\approx 4{\cdot}15 \times 10^3 (DM)\, \nu^{-2}$$

où ν = fréquence en MHz.

DM = mesure de dispersion en $(\mathrm{pc\ cm^{-3}})$.

Remarquons que si le plasma n'est pas uniforme:

$$DM = \int_0^L N_e \, dL$$

Question: Les sondes interplanétaires transmettent leur information sous forme digitalisée.

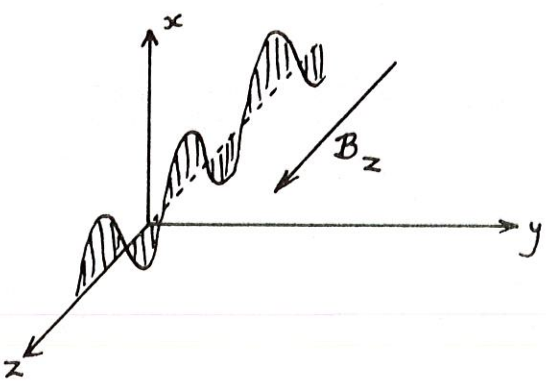
Quelles sont les contraintes sur le débit d'information imposées par le milieu interplanétaire et par l'ionosphère de la Terre?

Propagation des ondes e-m dans un plasma dans la présence d'un champ magnétique

Nous avons vu que la propagation d'ondes électromagnétiques dans un plasma est déterminée par le mouvement des électrons du plasma, le mouvement étant "forcé" par le champ électrique de l'onde incidente.

Nous avons jusqu'à présent considéré des cas sans champ magnétique. Le mouvement est dans le plan de polarisation de l'onde incidente: le plan de polarisation ne change pas son orientation à travers le milieu.

Considérons maintenant un cas avec champ magnétique: on va supposer, pour simplifier le problème, que le champ est parallèle à la direction de propagation de l'onde. Nous allons d'abord négliger toute force de rappel électrostatique.



On sait qu'un électron ayant vitesse $\dot{\underline{r}}$ subit une force $\underline{B} \wedge \dot{\underline{r}}$ dans un champ $\underline{B}$. Donc, le mouvement d'un électron du plamsa soumis à un champ dirigé dans le plan x-z aura une composante dans le plan y-z; le mouvement étant périodique, la composante dans le plan y-z le sera aussi et on vera done apparaître une composante de polarisation dans le plan y-z. On prévoit alors que, dans la présence d'un champ magnétique dirigé le long de la direction de propagation, la polarisation de l'onde incidente va changer.

Comment?

Pour en savoir plus, il faut calculer l'indice de réfraction du plamsa, ce qui revient à calculer sa susceptibilité diélectrique: il faut alors trouver le mouvement de l'électron soumis à un champ électrique oscillatoire dans la présence d'un champ magnétique stationnaire.

Si on néglige la force de rappel électrostatique, l'équation de mouvement est (en notation vectorielle)

$$m\ddot{\underline{r}} - \frac{e}{c}\underline{B} \wedge \dot{\underline{r}} = -e\underline{E} = -e\underline{E}_0 e^{i\omega t}$$

Or, le terme $\underline{B} \wedge \dot{\underline{r}}$ "mélange" les composantes: même une composante dirigée seulement le long de l'axe x, soit $\underline{B} \wedge \dot{\underline{r}}$, fait apparaître une composante le long de l'axe y. Il s'ensuit qu'il n'est pas commode de résoudre l'équation de mouvement dans le cas où l'onde incidente est polarisée linéairement.

Nous avons vu déjà qu'une onde polarisée linéairement peut être décomposée en deux ondes polarisées circulairement aux sens opposés:

$$\underline{E}_{\pm} = (\underline{\epsilon}_1 \pm i\underline{\epsilon}_2)\, e^{i(Kz - \omega t)}$$

$$\underline{E} = \underline{E}_{+} + \underline{E}_{-}\, e^{i\phi}$$

Comme les composantes x et y interviennent également dans cette représentation, on prévoit qu'il sera commode de décomposer l'onde initiale, résoudre séparément l'équation de mouvement pour chaque sens de polarisation circulaire, et de reconstituer l'onde à la fin.

L'équation de mouvement s'écrit alors de la façon suivante:

$$m\ddot{\underline{r}} - \frac{e}{c}B_z\, \epsilon_3 \wedge \dot{\underline{r}} = -eE_0\, e^{-i\omega t}(\underline{\epsilon}_1 \pm i\underline{\epsilon}_2)$$

On voit que $\underline{r}$ ne possède des composantes que dans les directions $\underline{\epsilon}_2$ et $\underline{\epsilon}_1$.

Or, le champ électrique est la cause du mouvement des électrons du plasma. Par conséquent, guidé par notre "intuition", nous allons chercher des solutions du type:

$$\underline{r} = \left[\underline{\epsilon}_1 A_x \pm i \underline{\epsilon}_2 A_y \right] e^{-i\omega t}$$

le signe "+" se rapportant au mouvement induit par l'onde polarisée circulairement à droite et le signe "-" au mouvement induit par la polarisation opposée. Le problème se reduit à la détermination des amplitudes A_x et A_y; on justifie le procédé en remarquement que si notre choix n'est pas bon, les équations ne se simplifieront pas et on ne trouvera pas de solution de ce type.

Le type de solution peut être simplifié davantage. En effet, comme, comme l'onde est polarisée circulairement, l'amplitude du champ électri que est le même quelle que soit l'orientation du plan. Un électron du milieu suit le champ: par conséquent

$$A_x = A_y$$

L'équation du mouvement devient alors (attention aux signes venant du produit vectoriel !):

$$-m\omega^2 A_x \left[\underline{\epsilon}_1 \pm i \underline{\epsilon}_2 \right] + i\omega A_x \frac{eB_z}{mc} \left[-\underline{\epsilon}_2 \pm i \underline{\epsilon}_1 \right]$$

$$= -e E_0 \left(\underline{\epsilon}_1 \pm i \underline{\epsilon}_2 \right)$$

Nous pouvons maintenant considérer chaque composante indépendemment; pour la composante $\underline{\epsilon}_1$, par exemple, on a:

$$-A_x \omega^2 - (\pm) A_x \frac{eB_z}{mc} = -\frac{eE_0}{m}$$

d'où:

$$A_x = eE_0 \Big/ m\left[\omega^2 \pm \frac{\omega e B_z}{mc} \right]$$

Donc, la solution ecmplète de l'équation de mouvement d'un électron dans le plasma est:

$$\underline{r} = A_x \left[\underline{\epsilon}_1 \pm i\, \underline{\epsilon}_2 \right] e^{-i\omega t}$$

$$= \frac{e}{m\left[\omega^2 \pm \dfrac{\omega e B_z}{mc}\right]} E_0\, e^{-i\omega t} \left(\underline{\epsilon}_1 \pm i\, \underline{\epsilon}_2 \right)$$

$$= \frac{e}{m\omega(\omega \pm \omega_B)} \underline{E}_{\pm}$$

où

ω_B = fréquence de Larmor

Les deux signes correspondent aux deux sens de la polarisation circulaire.

Les symboles x, y jouent aucun rôle particulier: $\underline{\epsilon}_1 \ddot{x}$ est l'accélération le long de $\underline{\epsilon}_1$ et $\underline{\epsilon}_1 \dot{y}$ est la vitesse le long de $\underline{\epsilon}_1$. Par conséquent, on peut écrire également:

$$m(\underline{\epsilon}_1 \ddot{x} \pm i \underline{\epsilon}_2 \ddot{y}) + \frac{e}{c} B_z \left[\underline{\epsilon}_2 \dot{y} - (\pm) i \underline{\epsilon}_1 \dot{x}\right] = -e E_o e^{i\omega t} (\underline{\epsilon}_1 \pm i \underline{\epsilon}_2)$$

Il s'ensuit que les composantes transversales se découplent et nous pouvons résoudre l'équation séparément pour chacune.

On a, pour la composante $\underline{\epsilon}_1$:

$$m\ddot{x} - (\pm) i \frac{e}{c} B_z \dot{x} = -e E_o e^{-i\omega t}$$

Guidé toujours par notre "intuition", nous allons supposer que la solution ait la forme:

$$x = A_x e^{-i\omega t}$$

On a alors:

$$-A_x \omega^2 - (\pm) A_x \frac{e B_z \omega}{mc} = -\frac{e E_o}{m}$$

d'où:

$$A_x = \frac{e E_o}{m\left[\omega^2 + (\pm)\omega \frac{e B_z}{mc}\right]}$$

De même:

$$\pm i m \ddot{y} + \frac{e}{c} B_z \dot{y} = -(\pm) i e E_o e^{-i\omega t}$$

d'où:

$$A_y = \frac{\pm e E_o}{m\left[\pm \omega^2 + \omega \frac{e B_z}{mc}\right]}$$

Donc, la solution complète de l'équation de mouvement est:

$$\underline{r} = \underline{\epsilon}_1 x + i \underline{\epsilon}_2 y$$

$$= \frac{e}{m\omega\left(\omega \mp \frac{e B_z}{mc}\right)} \underline{E}_{\pm}$$

$$= \frac{e}{m\omega(\omega \mp \omega_B)} \underline{E}_{\pm}$$

où: ω_B = fréquence de Larmor.

Les deux signes correspondent aux deux sens de la polarisation circulaire.

Souligonns la commodité (pour ce problème) de la réprésentation en ondes polarisés circulairement.

On voit que l'amplitude d'oscillation d'un électron du plasma dépend du sens de la polarisation circulaire: par conséquent, la constante diélectrique n'est pas la même pour les deux sens.

Nous pouvons calculer aisément la constante diélectrique par la même méthode que nous avons utilisée précédemment (amplitude d'oscillation électronique $\rightarrow$ moment dipolaire par unité de volume $\rightarrow$ constante diélectrique); on trouve:

$$\epsilon_{\mp} = 1 - \frac{\omega_n^2}{\omega(\omega \mp \omega_B)}$$

Par conséquent, la vitesse de phase est donnée par

$$v_{\mp} = \frac{c}{\left[1 - \frac{\omega_n^2}{\omega(\omega \mp \omega_B)}\right]^{1/2}}$$

Dans le contexte astrophysique:

$$\omega \gg \omega_B$$
$$\omega \gg \omega_n$$

Donc:

$$v_{\pm} \cong \frac{c}{\left[1 - \frac{\omega_n^2}{2\omega(\omega \pm \omega_B)}\right]} = \frac{c\,(\omega^2 \pm \omega\omega_B)}{(\omega^2 - \frac{\omega_n^2}{2}) \pm \omega\omega_B}$$

Nous voyons que les deux composantes se propagent dans le plasma à des vitesses différentes; si elles sont en phase à un moment donné, elles ne le sont pas plus tard, le déphasage étant fonction de la vitesse pénétrée dans le plasma.

Or, nous avons vu que la différence de phase entre deux ondes polarisées circulairement donne la direction de polarisation d'une onde polarisée linéairement dont elles sont les composantes; donc, la direction de polarisation change à mesure que l'onde avance dans le milieu. Un plasma dans la présence d'un champ magnétique est biréfringent; la rotation de la direction de polarisation s'appelle "l'effet Faraday".

Considérons une onde polarisée linéairement dans le plan x-z. Cela correspond à deux ondes polarisées circulairement en sens opposés, mais ayant la même phase. Les deux ondes se prop agent à des vitesses de phase différentes, la différence de vitesse Δv étant:

$$\Delta v = v_+ - v_-$$

$$= C \left[\frac{\omega^2 + \omega\omega_B}{(\omega^2 - \frac{\omega_n^2}{2}) + \omega\omega_B} - \frac{\omega^2 - \omega\omega_B}{(\omega^2 - \frac{\omega_n^2}{2}) - \omega\omega_B} \right]$$

$$= C \frac{\omega\, \omega_n^2\, \omega_B}{(\omega^2 - \frac{\omega_n^2}{2})^2 - \omega^2 \omega_B^2}$$

Pour les mileux ténus astrophysiques on suppose que $\omega \gg \omega_n, \omega \gg \omega_B$. Par conséquent:

$$\Delta v = C \frac{\omega_B\, \omega_n^2}{\omega^3}$$

Si à temps t = 0, les deux composantes circulaires étaient en phase, la différence de phase $\Delta\phi$ au bout d'un temps Δt est donnée par:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta v\, \Delta t$$

$$= \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{\omega_B\, \omega_n^2}{\omega^3} \Delta t$$

Comme:

$$\omega = 2\pi c/\lambda$$

$$\omega_n^2 = 4\pi e^2 N_e/m$$

$$\omega_B = e B_z/mc$$

le déphasage s'écrit:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{e B_z}{mc} \frac{4\pi e^2 N_e}{m} \frac{\lambda^3}{(2\pi c)^3} \Delta t$$

$$= \frac{e^3}{\pi c^4 m^2} \lambda^2 B_z N_e \Delta t$$

Si la vitesse de phase n'est pas très différente de c:

$$\Delta t \approx \Delta l/c$$

où Δl est la distance traversée.

Donc:

$$\Delta\phi = \frac{e^3}{\pi m^2 c^5} \lambda^2 B_z N_e \Delta l$$

Or, nous avons vu qu'un déphasage $\Delta\phi$ entre deux ondes polarisées circulairement correspond à une rotation $\Delta\theta = \frac{\Delta\phi}{2}$ du plan de polarisation de l'onde composite polarisée linéairement. On a alors pour l'effet Faraday:

$$\Delta\theta = \frac{e^3}{2\pi m^2 c^5} \lambda^2 B_z N_e \Delta l$$

$$\propto \lambda^2 B_z N_e \Delta l$$

Remarquons que la rotation est fonction du champ magnétique le long de z, de la densité électronique et de la distance parcourue. Donc, en connaissant $N_e \Delta l$, une simple mesure de la rotation Faraday nous permet de déterminer la composante longitudinale du champ magnétique.

Il semblerait à premier abord que, pour connaître la rotation du plan de polarisation, il faut connaître l'orientation initiale du plan. Pourtant, on remarque que la rotation est fonction de λ^2 aussi: il suffit alors de mesurer la variation de l'orientation du plan de la polarisation en fonction de λ (et de supposer quoi d'autre?)

Les quantités $N_e, \Delta l$ ne sont pas connues a priori: néanmoins, on peut déterminer leur produit à partir de la dispersion des signaux discontinus ($DM = \int_0^L N_e \, dl$).

Nous avons supposé que le champ magnétique est parallèle à la direction de polarisation de l'onde. Si cette condition n'est pas vérifiée, les équations de propagation se compliquent considérablement; en ce qui concerne l'effet Faraday, l'expression ne change pas, si on remplace B_z par la composante longitudinale du champ. Si α est l'angle entre le champ B et la direction de propagation de l'onde:

$$\Delta\theta \propto \lambda^2 N_e B \cos\theta \, \Delta l$$

On remarque qu'un plasma dans la présence d'un champ magnétique est non seulement biréfringent, il est aussi anisotrope.

Si les paramètres du plasma changent d'un endroit à un autre, l'expression pour l'effet Faraday s'écrit:

$$\Delta\theta \propto \lambda^2 \int_0^L B(l) \cos\theta(l) \, N_e(l) \, dl$$

où L est l'épaisseur du plasma.

Dans un contexte astrophysique, on écrit souvent

$$\Delta\theta = R \lambda^2$$

où:

$$R = .8 \int_0^L N_e B \cos\theta \, dl$$

N_e étant exprimée en cm^{-3}

& B " " μgauss

l " " parsec

λ " " m

On appelle la quantité R "la mesure de rotation".

Question: Nous avons étudié l'effet Faraday sans tenir compte de la force de rappel électrostatique électron-ion. Refaites l'analyse en en tenant compte ; que constatez-vous? Pouvez-vous proposer une explication?

Résumé

Les ondes

Une onde électromagnétique monochromatique qui se propage sur l'axe z est définie par :

$$S = S_o \cos(-\omega t + kz)$$

où :

S_o = amplitude

k = nombre d'onde

ω = fréquence angulaire

On a :

$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ = fréquence

$P = \frac{2\pi}{\omega}$ = période

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ = longueur d'onde

$V = \frac{\omega}{k}$ = vitesse de propagation de phase

On peut exprimer une onde électromagnétique sous forme complexe :

$$U = S_o e^{i(kz - \omega t)}$$

On a :

$$S = R_e(U)$$

$$\text{énergie} = UU^*$$

La vitesse de groupe v_g d'une onde quelconque est la vitesse à laquelle se propage l'énergie :

$$v_g = \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_{k=K_o}$$

Un milieu pour lequel $\frac{\partial \omega}{\partial k} \neq$ cte est dispersif.

Libre parcours moyen d'un électron dans un plasma neutre :

$$\lambda_e \approx 10^4 \frac{T^2}{N_e}$$

où :

T = température cinétique

N_e = nombre d'électrons cm^{-3}

Rayon de giration d'un électron dans un plasma :

$$r_B^e \approx .04 \frac{T^{1/2}}{B} \text{ cm}$$

où :

B = champ magnétique, en gauss

Fréquence de plasma : la fréquence à laquelle les électrons d'un plasma neutre oscillent autour des ions si on les perturbe :

$$f_n = 9 \times 10^3 N_e^{1/2} \quad s^{-1}$$

Vitesse de propagation de phase d'une onde e-m dans un plasma sans collisions

$$v = \frac{c}{\left[1 - \frac{\omega_n^2}{\omega^2 - \omega_n^2}\right]^{1/2}}$$

Vitesse de groupe dans un plasma ténu

$$v_g \approx c\left[1 - \frac{\omega_n^2}{2\omega^2}\right]$$

Mesure de dispersion

$$DM = \int_0^L N_e(l)\, dl$$

où :

N_e = densité électronique cm^{-3}

L = longueur du trajet d'un signal en pc.

Un signal ayant la forme d'une fonction δ s'étale en temps après propagation :

$$\Delta t \approx 4.15 \times 10^3 (DM)\, \nu^{-2} \quad sec$$

où :

ν = fréquence en MHz

Effet Faraday : le plan de polarisation d'une onde tourne d'un angle $\Delta\theta$ après propagation :

$$\Delta\theta = R\,\lambda^2$$

où :

$$R = .8 \int_0^L N_e(l)\, B(l)\, dl$$

= mesure de rotation

N_e = densité électronique cm^{-3}

B = champ en μgauss

L = distance en parsec

λ = longueur d'onde en m