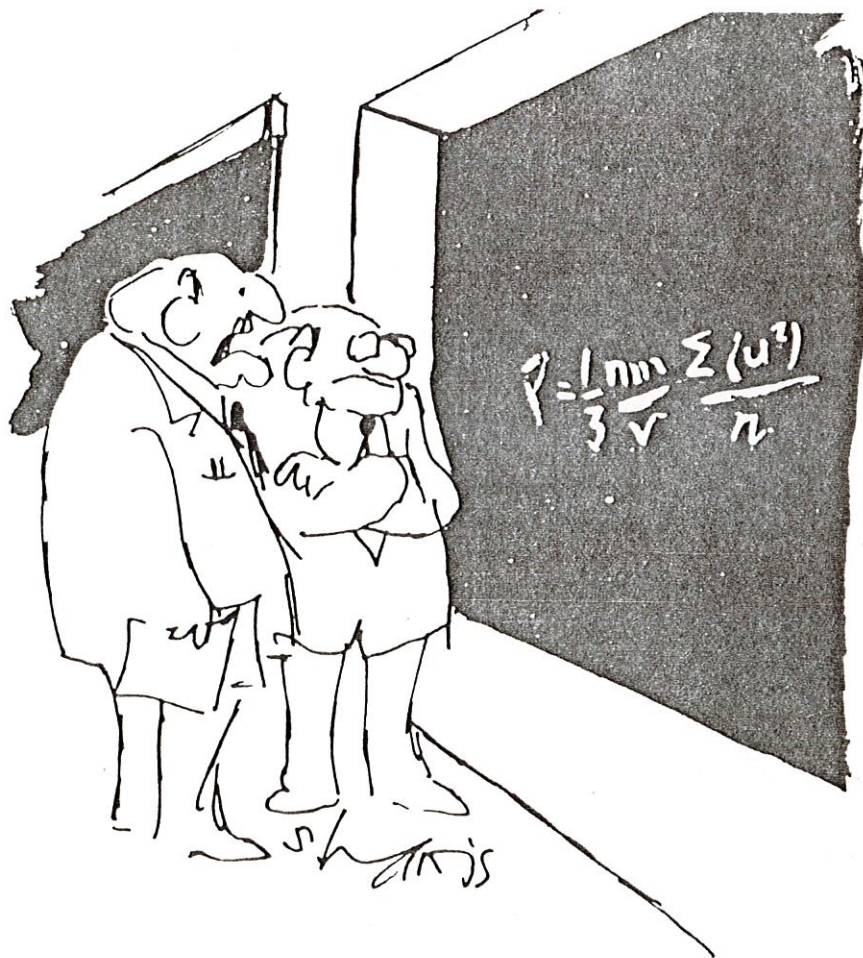


LA STRUCTURE INTERNE DE JUPITER



"What's most depressing is the realization that everything we believe will be disproved in a few years."

Jupiter est la planète la plus grande et la plus massive du système solaire. Comme dans le cas de toutes les planètes géantes, on n'observe que le sommet d'une atmosphère optiquement épaisse ; selon la longueur d'onde du rayonnement utilisée pour les observations, on pénètre plus ou moins dans cette atmosphère mais en tout cas on n'observe jamais des couches très profondes. A priori, on ne sait pas si Jupiter possède une surface solide..

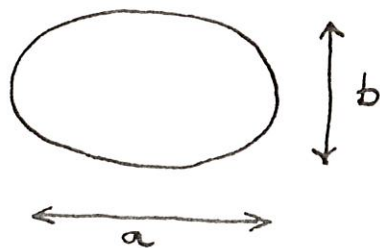
La structure interne de Jupiter est étudiée à l'aide de la théorie des plasmas denses ; "le jeu" est de trouver une structure interne qui est compatible avec les quelques caractéristiques connues et qui se rapportent en général à la surface.

Quelques caractéristiques importantes

1°) Masse 2×10^{30} g
 Rayon 7×10^9 cm
 Densité 1.33 g.cm^{-3}

2°) Période de rotation : aucune valeur unique -les différentes méthodes donnent des résultats légèrement différents. Un ordre de grandeur pour la période de rotation est de 10 heures.

3°) Forme : aplatie. L'aplatissement d'une planète est généralement paramétré



en termes du rapport $\frac{a-b}{a}$, où a est le diamètre équatorial et b le diamètre polaire.

Pour Jupiter :

$$\frac{a-b}{a} \approx 0.06$$

Cette valeur est relativement importante ; par exemple, pour la Terre, $(a-b)/a \approx 0.003$

4°) Température de la haute atmosphère : ≈ 130 K. Cette température est déterminée à l'aide de l'émission infra-rouge de la planète.

La valeur de cette température nous permet d'estimer, à l'aide de la loi de Stefan, le flux d'énergie émise par Jupiter ; on trouve $\approx 1.4 \times 10^4 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Or le pouvoir de réflexion (l'albédo) de Jupiter est connu ; par conséquent, on peut estimer la fraction de l'énergie incidente solaire absorbée par la planète et donc l'énergie totale absorbée. En équilibre thermodynamique, l'énergie rayonnée devrait être égale à l'énergie absorbée ; en réalité on trouve que

$$1.4 \times 10^4 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$\cong 2.7 \times \text{flux reçu du Soleil.}$$

Il s'ensuit que Jupiter possède une source interne d'énergie.

- 5°) Des sondes interplanétaires ont permis une mesure du champ magnétique de Jupiter. On trouve un champ très étendu, du type approximativement dipolaire à des grandes distances, mais ayant des composantes d'ordre élevé près de la planète. Au niveau des nuages, le champ est probablement de l'ordre de 50 gauss.
- 6°) Par ailleurs, les trajets des sondes dans le voisinage de la planète ont permis une analyse du champ gravitationnel : on trouve que le champ ne suit pas une loi en $1/r^2$. Ceci montre que la distribution d'une fraction importante de la masse n'est pas sphérique ; en effet on trouve une distribution aplatie semblable à la forme visible. Ceci suggère que, jusqu'à des profondeurs importantes, la matière de la planète est fluide.

Une analyse détaillée des trajets des sondes a donné aussi quelques renseignements (incomplets) sur la variation radiale de la densité

7°) Composition chimique de la haute atmosphère (analyses spectrales) :

Particule	fraction de toutes les particules
H_2	≈ 0.89
H e	0.11
H_2O	10^{-3}
CH_4	6.3×10^{-4}
NH_3	1.5×10^{-4}
H_2S	2.9×10^{-5}

Pression interne

Il est important d'abord d'estimer la pression interne de la planète.

Nous avons déjà vu que, quelle que soit la structure interne, une valeur "type" de la pression \bar{p} à l'intérieur d'une sphère de volume V est donnée par :

$$\bar{p}V = -\frac{1}{3} U_G$$

$$U_G = \text{énergie potentielle}$$

$$= -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \text{ s'il n'y a pas de variation radiale de densité,}$$

$$M = \text{masse de la sphère}$$

$$R = \text{rayon de la sphère}$$

Donc :

$$\bar{p} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{1}{5} \frac{GM^2}{R}$$

d'où :

$$\bar{p} \approx 10^7 \text{ bar}$$

On remarque que les pressions de cet ordre de grandeur sont complètement inaccessibles au laboratoire : par conséquent, l'état de la matière à l'intérieur de Jupiter ne peut pas être connu expérimentalement.

Composition chimique interne

La composition chimique superficielle n'est pas nécessairement un bon témoin de la composition interne : on pourrait imaginer plusieurs processus de séparation. On peut même citer un exemple où la composition de la haute atmosphère n'a aucun rapport avec la composition interne de la planète -le cas de la Terre !

Nous montrons maintenant que la densité moyenne de Jupiter et sa masse sont des témoins très importants.

Nous avons déjà vu que les couches profondes d'un corps ayant la masse de Jupiter sont dominées par l'état dégénéré de la matière. Dans le cas le plus élémentaire, la pression interne est due seulement à la présence d'électrons complètement dégénérés ; on appelle ce cas "froid", ce

qui signifie que l'énergie thermique interne est très petite devant l'énergie de Fermi.

Or la pression de Fermi est donnée par :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{5} (3\pi^2)^{2/3} \frac{k^2}{m_e} \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3} \\ &= \frac{1}{5} (3\pi^2)^{2/3} \frac{k^2}{m_e} \left(\frac{N}{V} \cdot \frac{Z m_a}{Z m_a} \right)^{5/3} \\ &= \frac{1}{5} (3\pi^2)^{2/3} \frac{k^2}{m_e} \left(\bar{\rho} \frac{Z}{m_a} \right)^{5/3} \end{aligned}$$

où : N = nombre total d'électrons libres

V = volume

Z = niveau d'ionisation

= 1 pour un atome 1 fois ionisé

= 2 pour un atome 2 fois ionisé

etc...

m_a = masse atomique

$\bar{\rho}$ = densité moyenne

Comme :

$$\bar{p}V = -\frac{1}{3} U_G = \frac{1}{5} \frac{GM^2}{R}$$

il s'ensuit, si on suppose que la composition chimique est dominée par les atomes de masse m_a à l'état d'ionisation Z , que :

$$(3\pi^2)^{2/3} \frac{k^2}{m_e} \left(\bar{\rho} \frac{Z}{m_a} \right)^{5/3} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{GM^2}{R}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \bar{\rho} Z / m_a &\approx 5.8 \times 10^{10} \left[\frac{M^2}{R^4} \right]^{3/5} \\ &\approx 3.1 \times 10^{23} \text{ pour Jupiter} \end{aligned}$$

Quel est le sens physique de cette relation ?

Nous avons déjà vu dans un chapitre précédent, qu'une fraction importante d'un corps en équilibre mécanique ayant la masse de Jupiter doit être à l'état dégénéré. Dans un tel corps, l'énergie interne est une

somme de l'énergie d'électrons dégénérés et de l'énergie thermique, cette dernière étant toutefois considérée comme négligeable. Par conséquent, l'énergie interne est une fonction de la densité moyenne et de la composition chimique qui est paramétrée en fonction de (Z/m_a) .

Par ailleurs, un gaz en équilibre vérifie le théorème du Viriel, ce qui nous permet de trouver un rapport entre l'énergie interne de Jupiter et sa masse.

Par conséquent, la densité moyenne de Jupiter nous renseigne sur sa composition chimique interne.

Considérons 4 modèles particuliers ; une analyse complète tiendrait compte d'un mélange d'éléments.

	H ionisé	He ionisé 1 fois	He ionisé complètement	Fe ionisé 1 fois
Z	1	1	2	1
m_a	1.7×10^{-24}	6.8×10^{-24}	6.8×10^{-24}	60×10^{-24}
$\bar{\rho}$	0.68	2.1	1.0	19

On remarque que de ces valeurs de $\bar{\rho}$, l'hydrogène pur est trop faible, l'hélium pur ionisé une fois est trop élevé et le fer ionisé une fois est beaucoup trop élevé. On remarque ^{que} le fer pur ionisé 14 fois peut donner une densité moyenne d'environ 1.3.

On peut trancher entre ces modèles en tenant compte de la température superficielle de Jupiter.

Considérons d'abord le fer ionisé 14 fois. Pour réaliser ce niveau d'ionisation, la température interne doit être telle que :

$$KT \approx E_{\text{ionisation}} \quad (\text{Fe XIV})$$

ce qui donne :

$$T \approx 10^6 \text{ K.}$$

On peut calculer le transport d'énergie du centre vers l'extérieur de Jupiter avec ces conditions et estimer donc la température superficielle ; on trouve une valeur très supérieure à 130 K, ce qui nous permet d'éliminer cette hypothèse.

Ce cas est extrême ; de façon semblable nous pouvons aussi éliminer l'hypothèse où l'intérieur de Jupiter est composée essentiellement de l'hélium ionisé 2 fois, et de tous les éléments dont la masse est supérieure à celle de l'hélium quel que soit leur niveau d'ionisation.

On voit alors qu'une composition dominée par l'hydrogène et l'hélium fera l'affaire : d'après des calculs détaillés, la composition interne est semblable à celle du Soleil et des étoiles en général, c'est-à-dire :

$$\frac{\text{nombre d'atomes d'hydrogène}}{\text{nombre d'atomes d'hélium}} = \frac{4}{1}$$

+ traces des autres éléments.

Remarquons que l'équation :

$$\frac{\bar{\rho} Z}{m_a} = 5.8 \times 10^{10} \left[\frac{M^2}{R^4} \right]^{3/5}$$

s'écrit aussi sous la forme :

$$M \propto R^{-1/3}$$

Comparons cette équation avec quelques planètes :

	M	R
Mars	0.6×10^{27} g	3×10^8 cm
Terre	6 " "	6 " "
Uranus	87 " "	25 " "
Jupiter	1.900 " "	70 " "

On remarque que, contrairement à la théorie, la masse est une fonction croissante du rayon.

La raison en est simple. En effet, la relation

$$M \propto R^{-1/3}$$

suppose que la matière est complètement dégénérée. Cette hypothèse est justifiable pour une grande fraction de la matière de Jupiter, mais elle l'est d'autant moins que le planète est moins massive. Pour ces cas, il faut tenir compte de plus en plus de la répulsion coulombienne, de l'existence des états atomiques etc...

Dans le cas extrême de la matière solide sans dégénérescence,

on a :

$$\frac{4\pi}{3} R^3 \approx \frac{4\pi}{3} r_0^3 N$$

où :

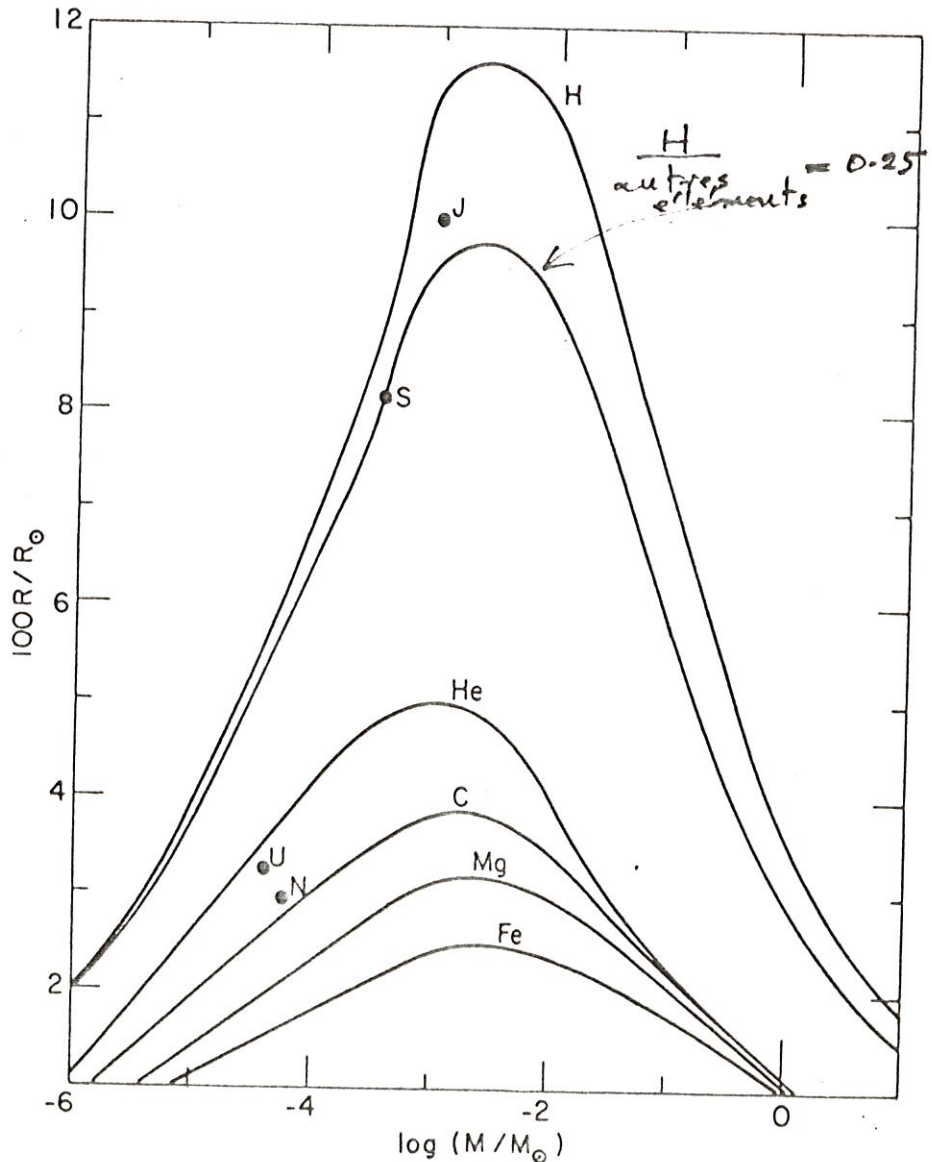
$$r_0 = \text{rayon de Bohr}$$

ce qui donne :

$$M \propto R^3$$

Il s'ensuit que pour les masses faibles, où la pression due à la dégénérescence est relativement faible, la masse est une fonction croissante du rayon, tandis que pour les masses élevées, où la contribution dominante à la pression est la dégénérescence électronique, la masse est une fonction décroissante du rayon.

Des calculs précis ont été faits pour plusieurs compositions chimiques.



Jupin 8

Sur le diagramme, on a indiqué Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune.

On remarque :

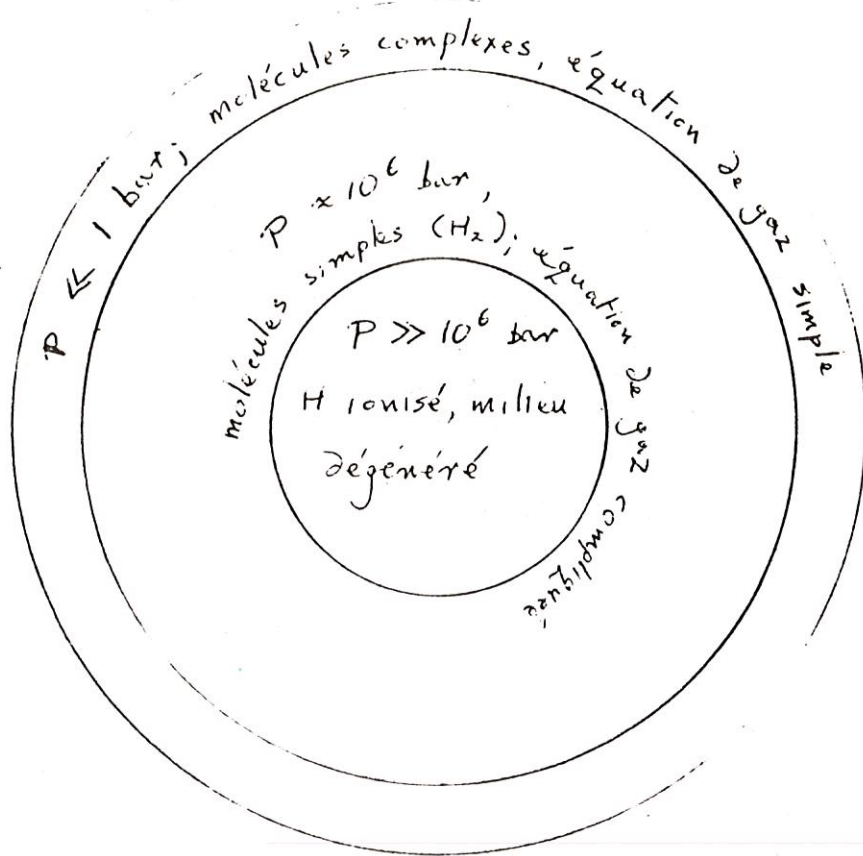
a) Uranus et Neptune sont loins d'être dominés par la dégénérescence ; par ailleurs, leur composition chimique doit porter une fraction très importante des éléments comme le C, N, O. En effet, par rapport à Jupiter et au Soleil, ces planètes sont sous-abondantes en hydrogène et en hélium -on en ignore la raison.

b) Jupiter se trouve à l'extremum des courbes : donc la dégénérescence joue un rôle essentiel dans sa structure interne. Par ailleurs, comme prévu, sa composition chimique est ^{un} mélange d'hydrogène et d'hélium.

Remarquons pourtant, que la planète n'est pas sur la partie $M \propto R^{-1/3}$ des courbes : par conséquent, l'état dégénéré doit être limité à une partie centrale de la planète seulement.

Structure interne de Jupiter

Schématiquement, nous pouvons diviser Jupiter (comme à fait César dans un autre contexte !) en trois parties :



Pour connaître la structure, il faut tout d'abord connaître l'état physique de la matière et pour cela il faut établir les équations d'état à chaque profondeur de la planète.

Etat de la matière au "centre"

Comme la composition chimique de Jupiter est largement dominée par l'hydrogène, nous allons, dans un premier temps, considérer qu'il n'y a pas d'autres éléments.

Dans les couches très profondes, les électrons sont dégénérés ; dans une première approximation, nous allons négliger toute interaction entre protons et électrons. En effet, nous considérons un plasma dense, composé de protons dans une "mer" d'électrons dégénérés. Les protons sont loins d'être dégénérés -leur comportement sera déterminé par leur interaction mutuelle coulombienne.



"mer" d'électrons

La masse du milieu est dominée par les protons : par conséquent, bien que la pression interne soit dominée par les électrons, l'état de la matière est déterminé par l'état des protons.

Il est naturel de supposer que les protons, dans leur ensemble, auront une des deux configurations :

(a) un "réseau" régulier, par exemple de type cubique. Une telle configuration représente un état de moindre énergie, dans l'absence de forces perturbatrices importantes ; le milieu est "solide" et résiste aux forces de cisaillement.

(b) un état où les forces internes perturbatrices l'emportent sur les forces de liaison du "réseau" idéal ayant la moindre énergie ; le milieu ne résiste pas aux forces de cisaillement -il est fluide.

L'exemple le plus élémentaire des perturbations internes est fourni par les vibrations du réseau : dans tout système lié, il est possible d'exciter des oscillations harmoniques. Par conséquent, le milieu possède les propriétés d'un "solide" seulement si le rapport "énergie des vibrations/énergie de liaison" est suffisamment petit. A l'état actuel de la physique,

on ne sait pas calculer théoriquement la valeur de ce rapport qui correspond à un changement de phase ; toutefois, des indications semi-empiriques suggèrent qu'un solide cristallin simple se transforme en liquide quand :

$$\frac{\text{énergie des vibrations du réseau}}{\text{énergie de liaison " "}} \gtrsim 2 \times 10^{-2}$$

Nous allons supposer que ce critère reste valable pour l'hydrogène dans les régions centrales de Jupiter.

Considérons donc un réseau simple cubique composé de protons séparés d'une distance x . Les électrons ne jouent aucun rôle (dans une première approximation).

Energie de liaison : Cette énergie est tout simplement l'énergie potentielle électrostatique due à un arrangement régulier de protons. Très approximativement, on peut considérer que chaque proton est "encastré" dans une "cellule" de rayon $\approx x$: par conséquent, à chaque proton correspond une énergie potentielle U de l'ordre de e^2/x (unités cgs)

$$\begin{aligned} U &= \frac{e^2}{x} \\ &= \frac{e^2 \rho^{1/3}}{(3m_H / 4\pi)^{1/3}} \end{aligned}$$

où :

ρ = densité

m_H = masse d'un proton.

Des calculs plus "catholiques", qui tiennent compte de la présence d'électrons, de l'énergie d'échange, etc... donnent un facteur supplémentaire

$$f : \quad U = \frac{f e^2 \rho^{1/3}}{(3m_H / 4\pi)^{1/3}}$$

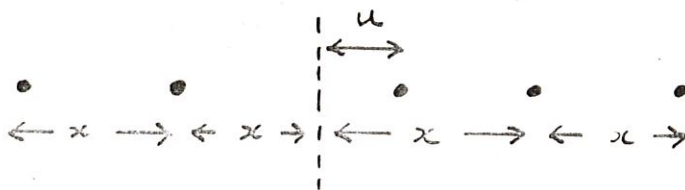
dont la valeur est de l'ordre de 2.

Energie des vibrations :

Considérons d'abord un cas uni-dimensionnel :



Supposons qu'un proton soit déplacé de son endroit "stable" d'une distance u , où $u \ll x$.



A l'endroit "stable", les forces sur le proton s'annulent. Par contre, quand il est déplacé, il est soumis à une force F :

$$F \approx \left[\frac{e^2}{(x-u)^2} - \frac{e^2}{(x+u)^2} \right]$$

$$\approx \frac{4 e^2 u}{x^3}$$

On a tenu compte ici seulement des forces dues aux deux voisins : l'effet des protons plus éloignés est petit.

Cette force tend à ramener le proton vers son point de départ ; l'équation du mouvement est alors :

$$F = -m\ddot{u} = \frac{4 e^2 u}{x^3}$$

C'est une oscillation harmonique, de fréquence angulaire ω :

$$\omega = \left[\frac{4 e^2}{x^3} \right]^{1/2}$$

Or, le réseau est un système quantique ; par conséquent, l'énergie E due à l'oscillation harmonique est donnée par :

$$E = \hbar\omega/2$$

Par ailleurs, nous avons à considérer un système à un degré de liberté seulement : dans un réseau tri-dimensionnel, on a 3 degrés de liberté, d'où :

$$E = 3 k \omega^2$$

$$= \frac{3k}{2} \left[\frac{4e^2}{m_H x^3} \right]^{1/2}$$

Finalement, si on tient compte de la présence d'électrons etc., on trouve :

$$E = \frac{3k}{2} \left[\frac{4e^2 f}{x^3} \right]^{1/2}$$

$$= \frac{3k}{2} \left[\frac{16\pi e^2 f}{3m_H^2} \right]^{1/2} \rho^{1/2}$$

où f a la même valeur que pour le calcul précédent.

Remarquons que nous pouvons aussi estimer la température de Debye θ pour ce réseau ; par définition

$$\theta = \text{énergie des vibrations, } k$$

$$\approx 7 \times 10^3 f^{1/2} \rho^{1/2}$$

$$\propto \rho^{1/2}$$

Stabilité du réseau :

$$\frac{\text{Énergie des vibrations}}{\text{Énergie de liaison}} = \frac{\bar{E}}{U}$$

$$= \frac{3k}{2} \left[\frac{16\pi e^2 f}{3m_H^2} \right]^{1/2} \rho^{1/2} / f e^2 \left[\frac{4\pi\rho}{3m_H} \right]^{1/3}$$

$$\approx 3 \times 10^{-2} f^{-1/2} \rho^{1/6}$$

On remarque :

(a) Le résultat n'est pas très sensible au facteur de correction f .
En tout cas, $f^{\frac{1}{2}} > 1$

$$(b) \quad e^{1/6} > 1$$

Par conséquent, la valeur du rapport est supérieure à la valeur critique 2×10^{-2} ; il s'ensuit que l'énergie de liaison du réseau cristallin éventuel n'est pas suffisante pour empêcher sa destruction par les vibrations quantiques du réseau.

Il est donc très probable que l'hydrogène (il en est de même pour l'hélium) au centre de Jupiter est à l'état liquide.

Remarquons qu'un état "liquide" ne signifie pas nécessairement un état très désordonné : par exemple, un liquide ne remplit pas tout le volume qui lui est disponible. Un liquide se distingue d'un solide par un manque de résistance contre les forces de cisaillement.

Equation d'état des électrons :

Nous avons jusqu'ici considéré qu'il n'y a aucune interaction entre les électrons et les protons.

En effet,

$$\begin{aligned} \alpha &\approx \left[\frac{m_H}{4\pi\rho/3} \right]^{1/3} \\ &\approx 7.5 \times 10^{-9} \rho^{-1/3} \\ &< \text{rayon de Bohr} \end{aligned}$$

Comme la séparation entre les protons est inférieure au rayon de Bohr, les électrons peuvent être considérés "libres" dans une première approximation.

Remarquons que le rayon de Bohr joue, pour les plasmas denses, un rôle semblable à la longueur de Debye pour les plasmas ordinaires.

Dans le cas des plasmas ordinaires, quand la séparation entre les ions est bien supérieure à la longueur de Debye, les électrons se comportent comme un "écran", et les ions n'interagissent pas.

De même, pour un plasma dense composé d'hydrogène, quand la séparation des protons est très inférieure au rayon de Bohr, l'interaction électron-proton peut être négligée et seule la force électrostatique proton-proton intervient pour le calcul de l'état de la matière.

Dans le cas d'un plasma dense composé des ions quelconques ayant charge Z , on appelle la longueur critique "la longueur de Fermi-Thomas" et sa valeur est égale à $Z^{-1/3}$ × rayon de Bohr.

Nous avons vu que, pour Jupiter, la séparation proton-proton n'est pas très inférieure à la longueur de Fermi-Thomas ; par conséquent, il faut tenir compte de l'interaction e - p pour calculer l'équation d'état des électrons.

L'équation d'état d'après l'énergie des électrons. Il y a plusieurs méthodes, dont une est celle de "Wigner-Seitz".

Schématiquement le calcul est fait de la façon suivante. On admet d'abord que le plasma peut être considéré comme un ensemble de "cellules" sphériques, chaque cellule ayant un proton au centre. On suppose que le rayon de chaque cellule est égal à b , où $b = [3m_H / 4\pi\rho]^{1/3}$. Le rayon b représente le "volume disponible" à chaque proton.

L'énergie est calculée d'après les 4 contributions suivantes :

- énergie de Fermi E des électrons dégénérés : c'est la contribution la plus importante :

$$E_f \propto 1/b^2$$

- La solution E_0 de l'équation de Schrödinger pour le système "cellule"-électron :

$$\nabla^2 \psi + \left(E_0 + \frac{Z}{r} \right) \psi = 0$$

avec les conditions limites :

$$\begin{aligned} \psi(0) & \text{ fini} \\ (\partial\psi/\partial r)_r & = 0 \end{aligned}$$

- Energie d'échange entre les électrons, etc.

- mouvement éventuel des protons et écart du réseau idéal.

D'après cette méthode, la pression du gaz d'électrons P peut être exprimée en fonction de x (la séparation proton-proton) de la façon suivante

$$P \propto x^{-5} [1 - \alpha x + 3x^2 - \gamma x^3]$$

La contribution en x est due aux interactions électrostatiques entre les électrons et les protons, et aux phénomènes d'échange entre les électrons. Les termes d'ordre supérieur sont dus aux phénomènes thermiques, écart du réseau idéal etc... En général, toute méthode de calcul donne des résultats semblables, les différences entre les modèles étant limitées aux termes d'ordre égal ou supérieur à 3.

Remarquons que, pour $x \rightarrow 0$, l'équation d'état est celle d'électrons dégénérés ; en effet, comme nous l'avons prévu, dans cette limite (qui n'est pas entièrement atteinte pour Jupiter), le gaz d'électrons est "libre".

La solution de l'équation de Schrödinger pour les électrons montre que le milieu est très conductible ; ceci n'est pas étonnant vu la nature "presque régulière" du réseau de protons. Il s'ensuit que l'hydrogène au centre de Jupiter possède des caractéristiques d'un métal.

Caractéristiques de la zone intermédiaire

Nous avons vu que l'état de la matière est calculable au centre de Jupiter grâce aux conditions extrêmes : le calcul aurait été encore plus simple pour des conditions encore plus extrêmes (par exemple, à l'intérieur des naines blanches).

Paradoxalement, dans la zone intermédiaire de Jupiter, où la pression n'est que de l'ordre de 10^6 bar, un calcul purement théorique est beaucoup plus difficile à faire. La raison est la suivante :

A $\approx 10^6$ bar, et à des températures $\ll 10^5$ K, l'hydrogène est loin d'être dégénéré ; au contraire, car les atomes sont très près les uns des autres, on assiste à la formation d'hydrogène moléculaire. Cette circonstance rend le calcul particulièrement difficile : les molécules interagissent les unes avec les autres de sorte qu'une seule molécule peut être simultanément soumise au potentiel de plusieurs molécules. Dans le langage de la théorie des plasmas denses, il faudrait connaître les corrélations d'ordre supérieur... un problème qui n'a pas encore été résolu de façon satisfaisante.

A l'heure actuelle, l'équation d'état dans la zone intermédiaire est établie de façon "semi-empirique".

D'une part, les expériences de laboratoire nous permettent d'étudier l'hydrogène moléculaire jusqu'aux pressions de l'ordre de 20 K bar.

D'autre part, d'après la théorie des gaz réels, le potentiel intermoléculaire ϕ doit être une superposition de deux composantes :

- une composante répulsive ϕ_r pour les petites distances intermoléculaires. Une forme qui s'est souvent révélée adéquate pour la théorie des gaz est

$$\phi_r \propto \exp[-\beta x]$$

où : x est la séparation intermoléculaire

β est une constante, de l'ordre de 2 \AA^{-1}

Cette forme ne tient pas compte du fait que la molécule de H_2 n'est pas sphérique ; aussi a-t-on proposé la forme :

$$\phi_r \propto \exp\left[-\beta \left| r_i + \delta r_{il} - r_j - \delta r_{jm} \right| \right]$$

où : r_i, r_j sont les positions des molécules i, j ;

δr_{il} est la position de l'atome l de la molécule i , par rapport à son barycentre.

β est une constante, de l'ordre de 3.3 \AA^{-1}

- une composante attractive ϕ_a quand la séparation intermoléculaire est grande ; cette composante est due aux forces de Van der Waals :

$$\phi_a = - \left[\frac{\gamma}{x^6} + \frac{\delta}{x^8} \right]$$

où :

$$\gamma \approx 0.48 \text{ Ry } \text{ \AA}^6$$

$$\delta \approx 1.45 \text{ Ry } \text{ \AA}^8$$

En principe, le potentiel le plus général serait une somme de ces deux composantes ; en pratique, le terme en x^{-8} domine rapidement pour $x \rightarrow 0$, ce qui n'est pas raisonnable physiquement. Une solution phénoménologique est de multiplier ϕ_a par une fonction qui tend vers 0 pour $x \rightarrow 0$, soit $\exp[-\epsilon/x^6]$. On a alors pour le potentiel intermoléculaire ϕ :

$$\phi = \alpha e^{-\beta x} - \left[\frac{\gamma}{x^6} + \frac{\delta}{x^8} \right] e^{-\epsilon/x^6}$$

A l'aide de ce potentiel phénoménologique, on peut établir l'équation d'état de H_2 , paramétrée en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Les expériences au laboratoire nous permettent de trouver les meilleures valeurs de ces constantes ; cette équation d'état est par la suite extrapolée de 20 Kbar jusqu'aux conditions de la zone intermédiaire de Jupiter.

Remarquons que l'extrapolation se fait sur plusieurs ordres de grandeur (de 2×10^4 bar \rightarrow 10^7 bar).

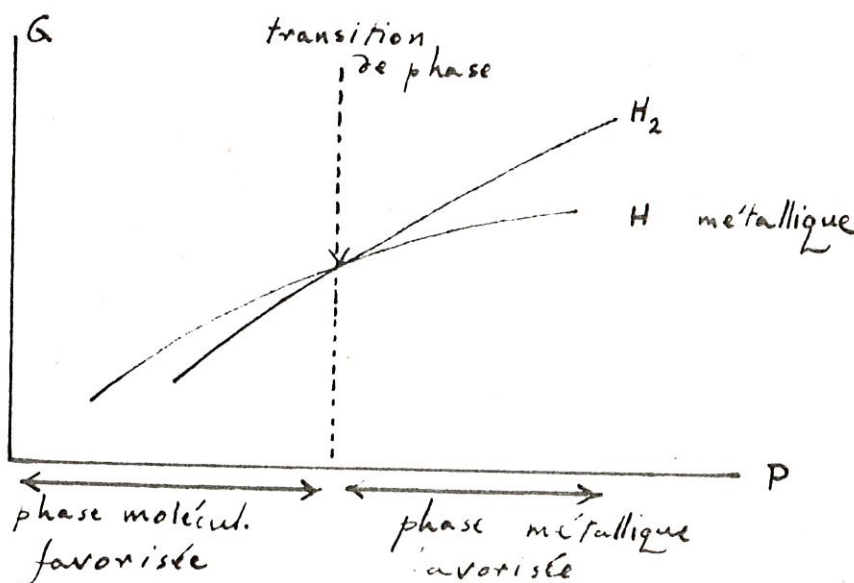
Déjà dans le domaine où l'on dispose de mesures, on a besoin de 5 paramètres au moins pour s'accorder avec une relation phénoménologique ; on s'attend à ce que l'extrapolation soit assez mauvaise.

Transition de phase entre "hydrogène métallique" et "hydrogène moléculaire"

Les caractéristiques physiques de l'hydrogène métallique et de l'hydrogène moléculaire sont très différentes ; il est donc essentiel de savoir à quelle profondeur se fait la transition.

Le procédé habituel pour déterminer les conditions nécessaires pour effectuer une transition de phase consiste à calculer, pour chaque phase, l'énergie libre de Gibbs $G(E + PV \text{ à } T = 0)$: la phase stable est celle ayant la valeur de G la plus petite.

D'après les paragraphes précédents, on "sait" établir l'équation d'état de chaque phase ; on peut donc calculer la valeur de G en fonction de P . Schématiquement, on trouve :



La transition de phase correspond à l'intersection des courbes.

Or, il se trouve que les courbes sont presque parallèles ; de plus, l'équation d'état de la phase moléculaire est sujette à de grandes incertitudes. Par conséquent, la transition de phase est difficile à identifier ; on la situe dans le domaine suivant :

$$2 \text{ Mbar} \lesssim P_{\text{trans.}} \lesssim 5 \text{ Mbar}$$

$$5000 \text{ K} \lesssim T_{\text{trans}} \lesssim 16000 \text{ K}$$

Ceci entraîne évidemment des incertitudes sur la profondeur où se fait la transition de phase.

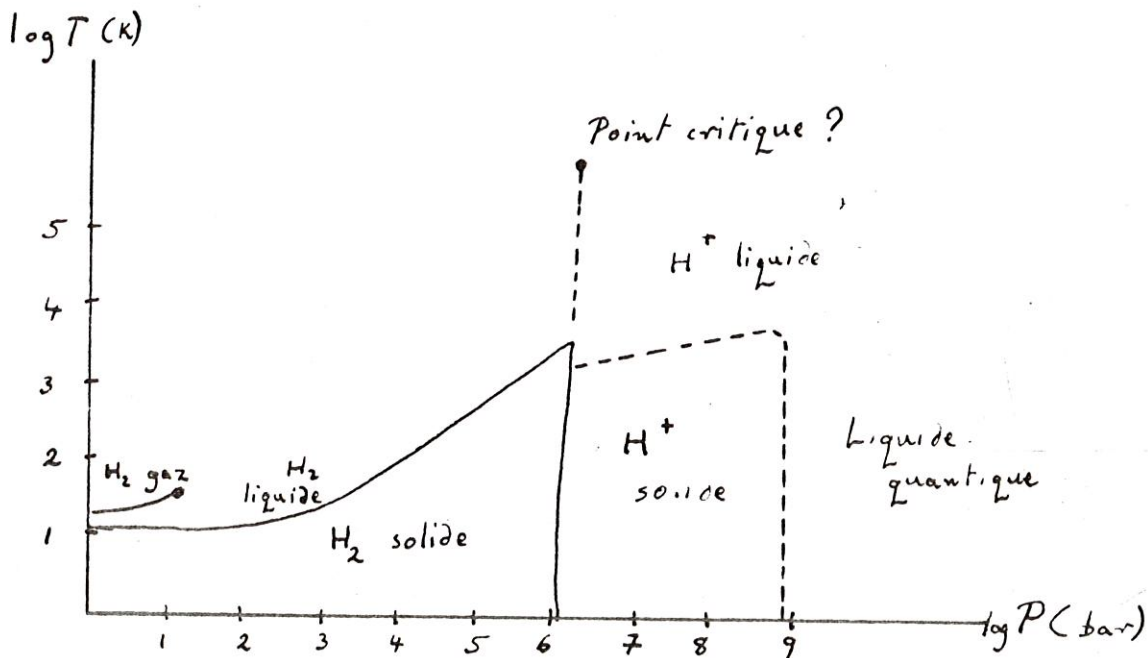


Diagramme de Clapeyron pour H
(schématique)

La présence de He

Jusqu'ici nous avons négligé la présence de l'hélium.

Très schématiquement, l'étude se fait comme pour l'hydrogène.

L'équation d'état de He neutre est obtenue à l'aide de l'interaction entre les atomes de He. Cette interaction est connue.

L'équation d'état de l'hélium ionisé est trouvée d'après la théorie des métaux.

Remarquons que l'hélium ne forme pas de molécules.

La théorie montre que He II ne représente pas une phase stable : à environ 170 Mbar, He I se transforme spontanément en HeIII.

Un problème plus subtil concerne l'équation d'état d'un mélange de H avec He. Le calcul se fait, en principe, à l'aide des méthodes déjà expliquées ; en effet, on connaît les potentiels interatomiques p - p, p - He, He - He.

Des simulations par méthode Monte Carlo ont montré que, à $T = 0$, H et He sont parfaitement miscibles ; à une pression P donnée, la somme des volumes partiels de l'hélium et de l'hydrogène respectivement

$V_{\text{He}}(P)$ et $V_{\text{H}}(P)$ est égale au volume du mélange à la même pression $V(P)$:

$V(P) = V_{\text{He}}(P) + V_{\text{H}}(P)$. La situation est moins nette pour $T \neq 0$ car les calculs sont plus difficiles à faire. A l'heure actuelle, on pense que, pour $P \gtrsim 10$ Mbar, il arrive une séparation de phase entre l'hélium solide et l'hydrogène liquide métallique : on verra par la suite qu'un tel changement de phase pourrait être à l'origine de la source interne d'énergie dont Jupiter a besoin.

Potentiel Gravitationnel de Jupiter :

Le potentiel gravitationnel U à l'extérieur de tout corps vérifie l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 U = 0$$

Pour un corps sphérique, la solution de cette équation est donnée par :

$$U_0 = - GM/r$$

où :

M = masse du corps

r = distance du centre.

Si le corps n'est pas sphérique, nous pouvons exprimer la solution de l'équation de Poisson formellement de la façon suivante :

$$U = U_0 + U_1$$

Cette solution est d'autant plus utile que l'écart entre la forme réelle et une sphère est petit.

Par ailleurs, on peut toujours développer U_1 en polynômes de Legendre P_l ; de sorte que :

$$U = - \frac{GM}{r} \left[1 - \sum J_l P_l \right]$$

où :

J_l sont des coefficients numériques.

Les trajets décrits par les satellites dans le voisinage de Jupiter sont fonction du potentiel gravitationnel : par exemple, si le potentiel n'est que $-GM/r$, les trajets sont des coniques simples. En particulier, les sondes artificielles ont permis une bonne estimation des 4 premiers termes du développement en polynômes de Legendre ; on trouve que $J_1 = J_3 = 0$ et on a pu déterminer les valeurs de J_2 et J_4 .

Le fait que les termes $\overset{im}{\wedge}$ pairs sont compatibles avec zéro suggère que la forme de Jupiter est celle d'un ellipsoïde de révolution, sans inhomogénéités ponctuelles ; on conclut que la matière dont Jupiter est fait ne soutient pas l'apparition des inhomogénéités importantes -il est donc vraisemblablement à l'état fluide.

Nous pouvons exprimer le potentiel gravitationnel de Jupiter aussi en fonction de sa distribution radiale de densité $\rho(r)$:

$$U(r) = -G \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|} d^3 r'$$

Cette équation peut être exprimée en fonction des harmoniques sphériques Y_l^m :

$$U(r) = -4\pi G \sum_{l,m} (2l+1)^{-1} Y_l^m r^{-(l+1)} \int d^3 r' Y_l^m (r')^l \rho(r')$$

Il s'ensuit que chaque coefficient J_l peut être exprimé en fonction des harmoniques sphériques et la distribution radiale de la densité :

$$J_l \propto \int d^3 r' Y_l^m (r')^l \rho(r')$$

Or, d'après les mouvements des sondes, on connaît les valeurs de $J_1 \dots J_4$. Par conséquent, on peut placer des limites sur la variation radiale de la densité à l'intérieur de Jupiter.

"Modélisation" de Jupiter :

Un corps sphérique sans rotation en équilibre hydrostatique vérifie l'équation :

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G \rho(r) M(r)}{r^2}$$

où : P = pression à la profondeur r

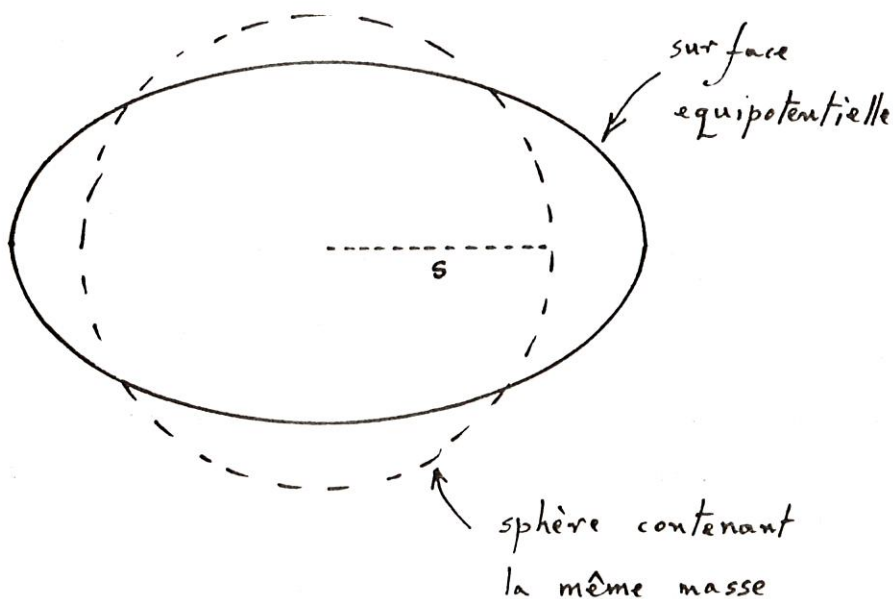
$M(r)$ = masse à l'intérieur du rayon r

$$= 4\pi \int_0^r \rho(s) s^2 ds$$

Dans le cas de Jupiter, il faut tenir compte des deux phénomènes supplémentaires :

a) forme de la planète : Jupiter est aplati : autrement dit, la surface équipotentielle n'est pas sphérique, mais ellipsoïdale. L'aplatissement est observé pour la planète dans son ensemble mais, vu la nature fluide de sa matière, les surfaces équipotentielles internes sont probablement ellipsoïdales aussi.

Comme l'écart de la forme sphérique n'est pas grand, on a recours à l'astuce suivante pour faciliter les calculs : on remplace chaque surface équipotentielle ellipsoïdale par une surface sphérique d'un rayon r tel que la masse à l'intérieur de r est égale à la masse à l'intérieur de la surface initiale.



b) la planète tourne : l'équation d'équilibre hydrostatique doit être modifiée par la présence d'une force centrifuge :

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G M(s) \rho(r)}{r} + \frac{2}{3} \omega^2 \rho(r) r$$

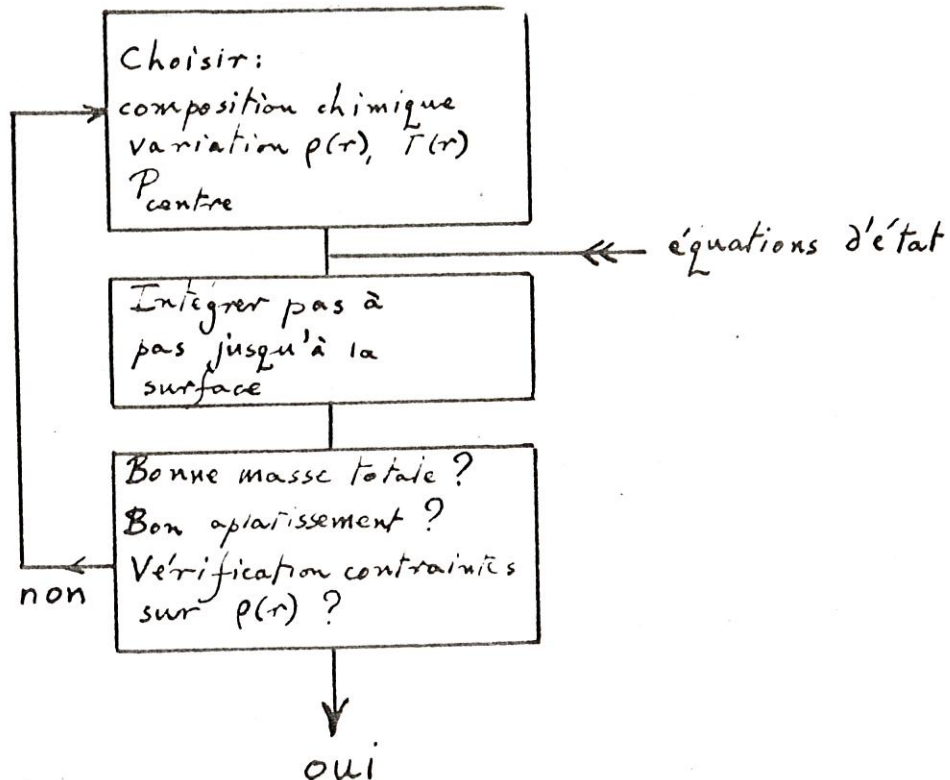
où : ω = vitesse angulaire

Le facteur $2/3$ est dû au fait que, pour un ω donné, la force centrifuge est fonction de la latitude sur la surface équipotentielle ; comme on ne veut pas faire intervenir la latitude dans l'équation d'équilibre hydrostatique, on est amené à la moyenner sur la surface en tenant compte de sa forme ellipsoïdale.

$\rho(r)$, $M(s)$ et dP/dr ne sont pas connus a priori ; par contre, on connaît P en fonction de ρ pour une température donnée, pour chaque état du milieu, à l'aide des équations d'état que nous avons déterminées. Il faut alors intégrer, pas à pas, l'équation d'équilibre hydrostatique du centre jusqu'à la surface, en prenant :

- 1) une composition chimique particulière
- 2) une distribution $\rho(r)$ et $T(r)$ particulières
- 3) une pression centrale particulière.

Le calcul donne la masse totale du modèle ; les observations nous donnent cette masse, et on dispose des contraintes sur les $\rho(r)$ possibles. Donc, schématiquement,



On trouve ainsi la structure interne de Jupiter.

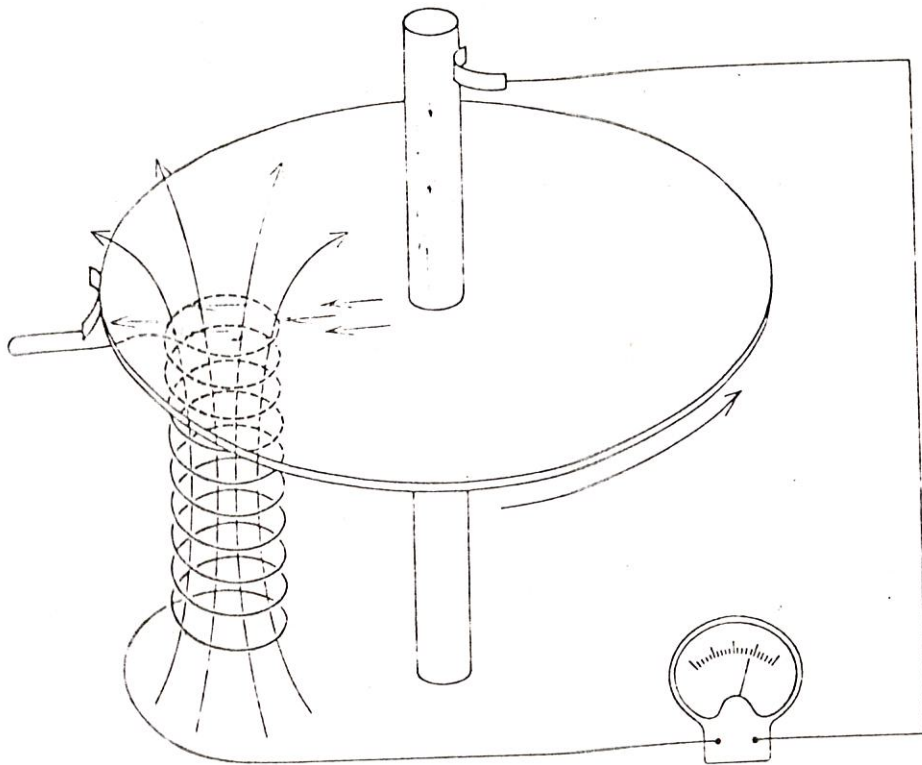
Remarquons quelques résultats importants :

1) Pour arriver à un Jupiter "réaliste", on est obligé de supposer qu'il existe au centre de la planète un "noyau" solide composé d'éléments autres que H et He ; leur abondance, pour l'ensemble de la planète, est du même ordre de grandeur que dans le Soleil.

2) L'abondance de He par rapport à H est aussi du même ordre de grandeur que dans le Soleil ; toutefois, ce résultat est très sensible à l'équation d'état choisie pour H_2 . En tout cas l'abondance de He dans le Soleil n'est pas très bien connue.

3) L'hydrogène métallique liquide remplit plus de la moitié de la planète. On peut supposer que le champ magnétique de Jupiter trouve son siège ici, bien que le mécanisme ne soit pas bien déterminé. A l'heure

actuelle, "les dynamos planétaires" sont très à la mode. Dans ces modèles, on suppose que le mouvement d'un milieu électriquement conducteur dans un champ magnétique primitif très faible crée un courant, ce qui crée un champ magnétique : si le mouvement est dans le bon sens, le nouveau champ peut s'ajouter à l'ancien, ce qui amplifie le champ. Par conséquent, le courant électrique s'amplifie...et ainsi de suite, pour donner le champ observé maintenant. Schématiquement :



D'après ce modèle :

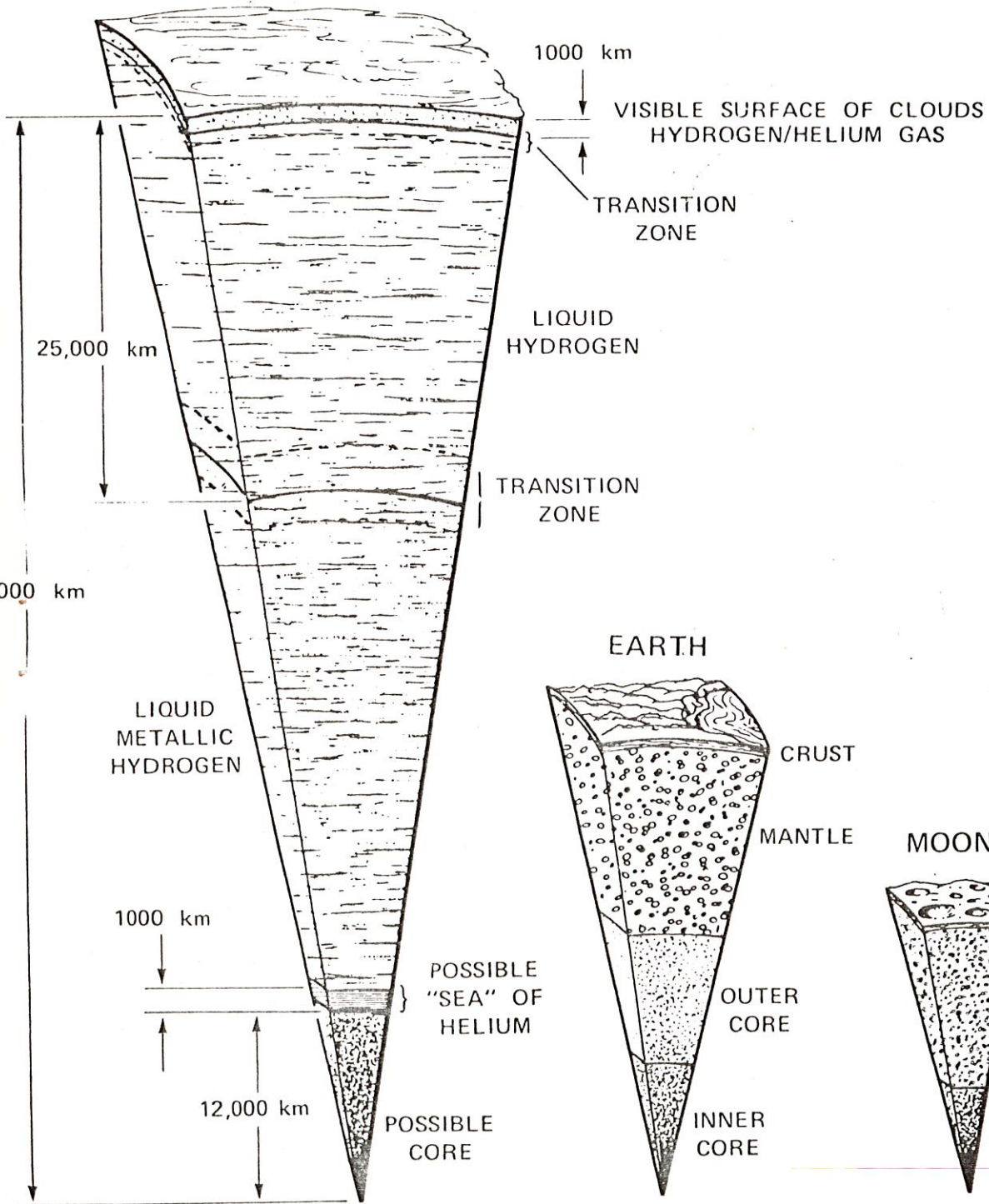
- les corps n'ayant pas de milieu fluide et conducteur à l'intérieur ne devraient pas avoir un champ important. En effet, la Lune dont le noyau est au mieux "plastique" n'a pas de champ notable aujourd'hui ; remarquons pourtant que les astronautes ont rapporté de la Lune des morceaux de matière magnétisée : on ignore leur origine. Mars, n'a pas de champ notable non plus : on ignore son état interne.
- les corps qui tournent lentement ne devraient pas avoir un champ magnétique. En effet, Vénus, dont la période de rotation est de 243 jours n'a pas de

de champ, bien que sa masse, densité, etc.. et donc vraisemblablement sa structure interne soient semblables à celles de la Terre. Mercure, dont la période de rotation est de 59 jours, possède un champ très faible.

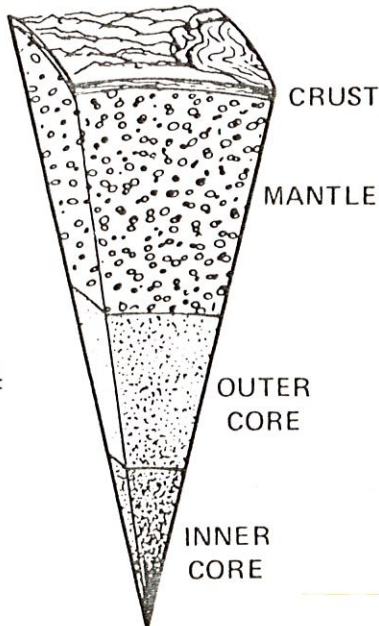
4) Si il y a une séparation de phase entre l'hélium et l'hydrogène métallique on peut envisager la formation des "gouttes" d'hélium dans la zone remplie de H^+ liquide ; ces gouttes vont par la suite diffuser vers le centre de la planète. Ce mouvement libère de l'énergie potentielle gravitationnelle, c'est une des explications proposées pour le rayonnement "excessif" de Jupiter.

Schématiquement, la structure interne de Jupiter, d'après ces types de calculs est :

JUPITER



EARTH



MOON

