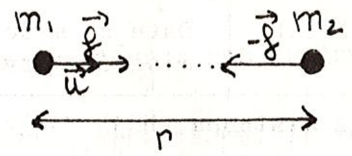
L'ATTRACTION GRAVITATIONNELLE

Vers la fin du XVIIe, certains savants pensaient que le mouvement des planètes autour du Soleil et des satellites autour des planètes étaient explicables par une attraction décroissant avec la distance. Déjà Képler, au siècle précédent, avait eut le premier l'idée d'assimiler l'attraction exercée par la Terre sur la Lune avec celle qu'elle exerce sur les corps en chute libre. Il put alors, grâce à l'outil mathématique qu'il s'était forgé, déduire des lois de Képler l'existence d'une force centrale d'attraction en $1/r^2$. Inversement, il put montrer que la trajectoire d'un corps soumis à une attraction centrale en $1/r^2$ est une conique et que les lois de Képler sont vérifiées dans le cas d'une ellipse. A partir de là, la loi d'attraction de Newton accumula les succès : explications des variations des éléments des orbites planétaires par perturbation des autres planètes, découverte de Cérès, Neptune, etc... L'étude des systèmes binaires d'étoiles montra l'universalité de la loi de Newton. A la fin du XIXe, Le Verrier pouvait décrire le système solaire comme une mécanique achevée et harmonieuse régie par la gravitation. Rares étaient les faits échappant à cette description. Le plus remarquable était l'avance au périhélie de Mercure (40" par an). La relativité générale a comblé cette lacune. L'attraction gravitationnelle en $1/r^2$ n'en est plus qu'une approximation. C'est naturellement cette approximation que l'on considère ici.

I Analogie entre gravitation et électrostatique :



La masse m_2 exerce sur m_1 une force

$$\vec{f} = \frac{G m_1 m_2}{r^2}\,\vec{u}$$

m_1 exerce sur m_2 une force $-\vec{f}$.

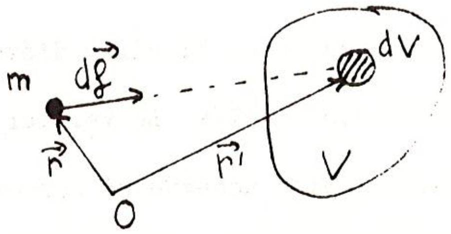
L'analogie avec l'électrostatique nous permet d'avoir les principales propriétés du champ gravitationnel. Il suffit de faire la transformation

$$\left|\begin{array}{l} q \longrightarrow m \\ 1/4\pi\varepsilon_0 \longrightarrow G \end{array}\right.$$

sans oublier que la force gravitationnelle est uniquement attractive.

La force gravitationnelle créée par une répartition volumique de masse sur une masse m située en un point $\vec{r}$ est donnée par :

$$\vec{f}(\vec{r}) = Gm \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{(\vec{r}-\vec{r}\,')^3}\,dV$$



qu'on peut encore mettre sous la forme

$\vec{f} = m\vec{\mathcal{G}}$ où $\vec{\mathcal{G}}$ est le champ gravitationnel (analogue de $\vec{E}$)

De même $\vec{\mathcal{G}}$ dérive d'un potentiel gravitationnel $\mathcal{U}$ (analogue de V)

$$d\mathcal{U} = -\vec{g}\cdot d\vec{r} \quad \text{soit} \quad \vec{\mathcal{G}}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{\vec{r}}\,\mathcal{U}(\vec{r})$$

$\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{\vec{r}}$ est le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$ au point $\vec{r}\,(x, y, \ldots)$

Pour une masse ponctuelle $\quad \mathcal{U} = -\dfrac{Gm}{r} \quad \left(V = 1/4\pi\varepsilon_0 \times (q/r)\right)$

Pour une répartition de masses m_i en un des points $\vec{r}_i$

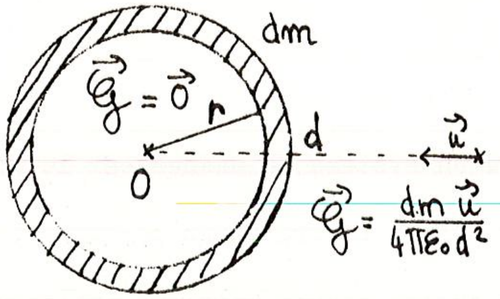
$$\mathcal{U}(\vec{r}_i) = -\sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Pour une répartition continue

$$\mathcal{U}(\vec{r}) = -G \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}\,')\,dV}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Le théorème de Gauss s'applique :

Le champ créé à l'extérieur par une sphère où la distribution de masse suit une loi ρ (r) (symétrie radiale) est le même que celui de la masse totale concentrée en son centre. Quant à l'intérieur, on peut considérer que la sphère est constituée de coquilles sphériques concentriques.



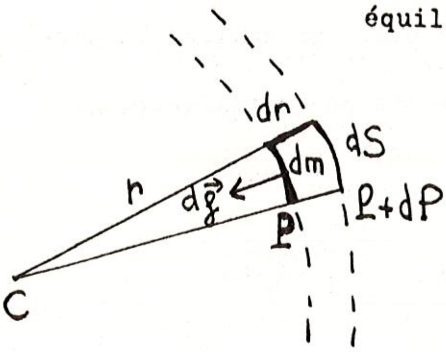
Chacune est équivalente à un conducteur

A l'intérieur le champ est nul

A l'extérieur, comme plus haut, le champ est celui de la masse de la coquille placée en son centre.

On peut donc calculer le champ en tout point intérieur à la sphère, situé à une distance r : c'est celui créé par la sphère de rayon r, concentrée en O, de masse $M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r')\,dr'$

- Application : Variation de pression à l'intérieur d'une sphère en équilibre.



Considérons un élément de masse dm situé à une distance r du centre C.

Cet élément est en équilibre sous l'effet de la surpression de la matière qui équilibre l'attraction gravitationnelle de la sphère de rayon r : la pression doit croître vers l'intérieur

$$dg + (P+dP)\,dS - P\,dS = 0$$

$$dg = \frac{1}{r^2}\underbrace{\rho(r) \times dS \times dr}_{dm} \times G\underbrace{\int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r')\,dr'}_{M(r)}$$

d'où : $$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi G\rho(r)\int_0^r r'^2\rho(r')\,dr'}{r^2}$$

Si on suppose ρ = cste

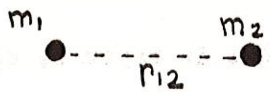
$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4}{3}\pi G \rho^2 r$$

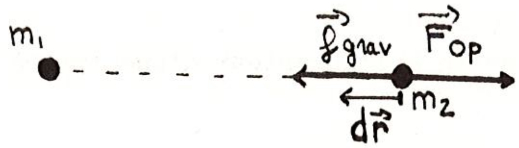
soit $P = P_c - \frac{2}{3}\pi G \rho^2 r^2$ qui donne la loi de décroissance de la pression

On peut choisir une loi $\rho = \rho_c - \alpha r$, si on veut une loi de variation plus conforme à une structure planétaire, ou d'autres lois plus raffinées.

<u>Energie gravitationnelle</u> :

L'énergie gravitationnelle $\mathcal{U}$ d'un système de masses est le travail qu'il faut fournir pour assembler ce système à partir d'une position originelle ($\mathcal{U}$ = 0 par définition) où toutes les masses seraient infiniment éloignées les unes des autres.





Pour un système de 2 masses m_1 et m_2, on peut considérer que l'on maintient m_1 et que l'on amène m_2 de l'infini jusqu'à une distance r_{12} de m_2. Supposons que l'on réalise l'opération par une suite de quasi équilibres.

La force exercée par l'opérateur est $\vec{F}_{op} = -\vec{f}_{grav}$ d'où :

$$\mathcal{U} = \int_{\infty}^{r_{12}} G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\vec{u}\cdot d\vec{r} = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

L'énergie gravitationnelle d'un système de masses est toujours négative : c'est, par définition, le travail fourni par l'opérateur or ce travail est résistant car les forces gravitationnelles sont attractives.

$$V_1 = -G\frac{m_1}{r_{12}} \qquad V_2 = -G\frac{m_2}{r_{12}}$$

on peut donc écrire : $\mathcal{U} = \frac{1}{2}(m_1 V_1 + m_2 V_2)$

Pour 3 masses on a :

$$\mathcal{U} = -G\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}\right)$$

$$= -G \sum_{i>j}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

(on ne compte les paires qu'une seule fois).

ou encore :

$$\mathcal{U} = -\frac{G}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathcal{V}_i \quad \left(\text{analogue de } U = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i\right)$$

Ces expressions sont bien sûr vraies pour un nombre quelconque N de masses.

Pour une distribution continue $\mathcal{U} = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(\vec{r})\, \mathcal{V}(\vec{r})\, dV$

<u>Une relation importante relie $\vec{f}$ et $\mathcal{U}$</u> :

Considérons en effet N masses m_i aux positions $\vec{r}_i$. Sur chacune de ces masses s'exerce une force $\vec{f}_i$ due à l'attraction des autres.

Supposons que m_i subisse une translation $\vec{dr}_i$. Sous l'effet de ce réarrangement spatial, les $\mathcal{V}_i$ varient et donc $\mathcal{U} = \frac{1}{2}\sum m_i \mathcal{V}_i$ subit une variation d$\mathcal{U}$. Le travail des forces électrostatiques étant l'opposé de la variation d'énergie gravitationnelle, $\vec{f}_i . \vec{dr}_i = -\, d\,\mathcal{U}$

et donc : $\vec{f}_i = -\,\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}_i}\, \mathcal{U}$

Expression évidente pour un système de 2 particules.

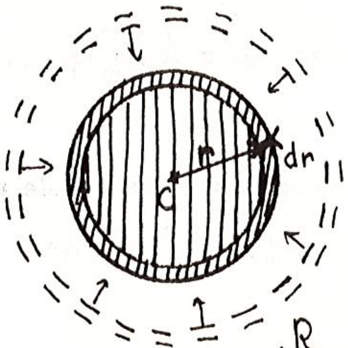
(on obtient une expression analogue pour un ensemble de conducteurs à charges constantes).

Lorsqu'une masse m se déplace dans un champ gravitationnel sans que ce déplacement ait une influence sur les sources du champ, elle est soumise à une force $\vec{f}(\vec{r}) = -\overrightarrow{grad}_{\vec{r}}\, \mathcal{U}$ où $\mathcal{U}$ est l'énergie gravitationnelle de la masse dans le champ.

On a alors $\mathcal{U}(\vec{r}) = m\mathcal{V}(\vec{r})$ (cas de la chute des corps, par exemple).

<u>Exemple</u> : Calcul de l'énergie gravitationnelle d'une sphère.

On peut appliquer la formule plus haut, ce qui oblige à calculer $\mathcal{V}(r)$ ou bien à considérer que l'on amène des coquilles sphériques qu'on ajoute de façon à constituer la sphère complète.



La masse de la coquille est

$dm = 4\pi r^2 dr \rho(r)$

L'énergie qu'il faut fournir pour amener la coquille est $d\mathcal{U} = -\dfrac{G\,m\,M(r)}{r}$

d'où $$\mathcal{U} = -\int_0^R 4\pi G\, r^2 \rho(r) M(r)\, dr$$

soit $$\mathcal{U} = -16\pi^2 G \int_0^R r\rho(r) \left(\int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \right) dr$$

Si ρ = cste

$$\mathcal{U} = -16\pi^2 G\rho^2 \int_0^R r \times \frac{r^3}{3} dr = -16\pi^2 G\rho^2 \frac{R^5}{15}$$

soit finalement

$$\boxed{\mathcal{U} = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}}$$

D'une façon générale, l'énergie d'un système autogravitant de masse M, dont la dimension typique est R peut se mettre sous la forme $-\alpha \dfrac{GM^2}{R}$ où α est un réel positif de l'ordre de l'unité. Des considérations simples d'homogénéité suffisent d'ailleurs pour s'en assurer.

II Le théorème du Viriel :

Ce théorème est particulièrement important pour l'étude de la stabilité des systèmes liés par gravitation (étoiles, amas d'étoiles, galaxies, etc...)

Soient N masses m_i aux points $\vec{r}_i$ constituant un système isolé autogravitant.

Sur chaque masse s'exerce une force $\vec{f}_i = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{\vec{r}_i}\,\mathcal{U}$

Calculons l'expression $\sum_i \vec{f}_i \cdot \vec{r}_i$

$$\sum_i \vec{f}_i \cdot \vec{r}_i = -\sum_i \overrightarrow{\mathrm{grad}}_{\vec{r}_i}\,\mathcal{U} \cdot \vec{r}_i$$

Pour calculer le deuxième membre, il est utile de se rappeler l'identité d'Euler relative aux fractions homogènes. Une fonction f(x,y) est dite homogène de degré α si, pour tout réel λ, $f(\lambda x,\lambda y) = \lambda^\alpha f(x,y)$

Dérivons cette expression par rapport à λ

$$f'_x\, x + f'_y\, y = \alpha \lambda^{\alpha-1} f(x,y)$$

soit pour $\lambda = 1$, $f'_x\, x + f'_y\, y = \alpha f(x,y)$ qui est l'identité d'Euler.

Plus généralement, pour $f(\vec{r})$ $\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{\vec{r}} f \cdot \vec{r} = \alpha f$

et pour $f(\ldots,\vec{r}_i,\ldots)$ $\sum_i \overrightarrow{\mathrm{grad}}_{\vec{r}_i} f \cdot \vec{r}_i = \alpha f$

Or $\mathcal{U}$ a pour expression

$$\mathcal{U}(\ldots,\vec{r}_i,\ldots,\vec{r}_j,\ldots) = -\frac{G}{2}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}$$

Elle est donc homogène de degré -1 par rapport aux $\vec{r}_i$ et

$$\sum_i \overrightarrow{\mathrm{grad}}_{\vec{r}_i}\,\mathcal{U} \cdot \vec{r}_i = (-1)\times\mathcal{U}$$

d'où

$$\sum_i \vec{f}_i \cdot \vec{r}_i = \mathcal{U}$$

Par ailleurs

$$\sum_i \vec{f_i}\cdot\vec{r_i} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v_i}}{dt}\cdot\vec{r_i} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{v_i}\cdot\vec{r_i}\right) - \sum_i m_i \vec{v_i}\cdot\frac{d\vec{r_i}}{dt}$$

Donc, en posant l'énergie cinétique $\mathcal{T} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{v_i}\cdot\vec{r_i}\right) = 2\mathcal{T} + \mathcal{U}$$

Supposons que le système soit en mouvement dans une région finie de l'espace avec des vitesses ne tendant pas vers l'infini.

$\sum_i m_i \vec{v_i}\cdot\vec{r_i}$ est une fonction bornée F(t) du temps.

Prenons la valeur moyenne de l'égalité dans le temps

$$2\langle\mathcal{T}\rangle + \langle\mathcal{U}\rangle = \left\langle \frac{d}{dt}F(t)\right\rangle$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{d}{dt}F(t)\,dt = \lim_{\tau\to\infty} \frac{F(\tau)-F(0)}{\tau}$$

$$= 0 \quad (F \text{ est bornée})$$

d'où $\boxed{2\langle\mathcal{T}\rangle + \langle\mathcal{U}\rangle = 0}$ qui constitue le théorème du Viriel pour l'interaction gravitationnelle (ou aussi l'interaction électrostatique, également en $1/r^2$. Pour une interaction en $r^{-\alpha}$, $2\langle\mathcal{T}\rangle + (\alpha-1)\langle\mathcal{U}\rangle = 0$)

<u>Conséquences</u> :

1) Le système est isolé, donc $\mathcal{T} + \mathcal{U} = E$ (constante)

et $\langle\mathcal{T}\rangle + \langle\mathcal{U}\rangle = E$

d'où

$$\langle\mathcal{T}\rangle = -E$$
$$\langle\mathcal{U}\rangle = 2E$$

$\mathcal{T} > 0 \Rightarrow$ un système autogravitant se mouvant dans une région finie de l'espace a une énergie totale $E < 0$. De même un système d'énergie négative garde la majeure partie de ses particules dans un volume fini : si les particules étaient entièrement séparées, on aurait $\mathcal{U} \simeq 0$ et l'énergie restante, sous forme cinétique, serait positive. Par contre certaines particules peuvent s'échapper à l'infini suivant les conditions initiales.

2) Il n'existe pas d'équilibre statique (vitesses nulles) stable pour des particules liées par gravitation (ou autres forces en $1/r^2$).

En effet $\langle \mathcal{U} \rangle < 0$. Le théorème du Viriel implique qu'il y a une énergie cinétique non nulle et comparable en moyenne à l'énergie gravitationnelle.

L'univers est donc composé de corps en mouvement dès lors qu'il est dominé par des forces en $1/r^2$: les étoiles se meuvent au sein des galaxies, les atomes au sein des étoiles et les électrons au sein des atomes (les phénomènes de quantification n'altèrent pas la validité du théorème : on peut par exemple le vérifier sur l'atome de Bohr)

3) On peut remarquer que $\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{v}_i . \vec{r}_i\right)$ est aussi égal à $\frac{1}{2}\frac{d^2 J}{dt^2}$

où $J = \sum_i m_i \vec{r}_i^{\,2}$ est le moment d'inertie du système.

Donc $\frac{1}{2}\frac{d^2 J}{dt^2} = 2\mathcal{T} + \mathcal{U}$

On peut donc prévoir le sens de l'évolution instantanée d'un système, J étant une mesure de la répartition spatiale.

<u>Application</u> : Condensation d'un nuage de gaz.

Soit un nuage de N particules ponctuelles qu'on suppose en équilibre thermique à la température T. On a ainsi un corps chaud qui perd donc de l'énergie sous forme radiative ($\Delta E < 0$)

L'équipartition de l'énergie nous donne $\langle \mathcal{T} \rangle = \frac{3}{2} NkT$

$E = -\langle \mathcal{T} \rangle$ $\qquad T = \frac{-2E}{3kN}$ $\qquad \Delta T = \frac{-2\Delta E}{3kN}$ La température augmente. $\quad \langle \mathcal{U} \rangle = 2E \qquad \Delta \langle \mathcal{U} \rangle = 2\Delta E$

L'énergie gravitationnelle diminue : le nuage se condense.

C'est cette contraction du nuage qui permet l'émission radiative et l'augmentation de température.

Dans l'étude de l'évolution stellaire on montre que si la masse du nuage est suffisante, la température peut devenir assez grande pour que démarrent les réactions nucléaires qui arrêtent la contraction par pression de radiation. Le nuage est devenu une étoile. On note donc l'importance de cette phase de contraction régie par le Viriel dans l'évolution stellaire lorsqu'il n'y a pas encore (ou il n'y a plus) de combustible nucléaire.

III <u>Mouvements des corps</u> :

L'étude du Viriel nous a montré le caractère naturel du mouvement des corps sous attraction gravitationnelle. On se limite ici au problème à 2 particules sphériques qui a seul une solution analytique. Pour les systèmes plus complexes les solutions numériques par approximations successives s'imposent.

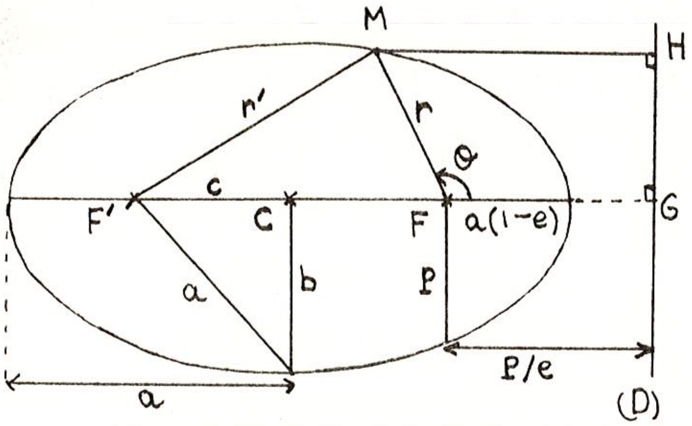
<u>Lois de Képler</u> :

a) L'orbite des planètes est une ellipse dont le Soleil est un foyer.

b) L'aire balayée par le rayon vecteur est proportionnelle au temps de balayage (loi des aires)

c) a^3/T^2 = cste où a est le demi-grand axe de l'ellipse et T la période sidérale de révolution

Eléments des coniques :



L'orbite des planètes est une ellipse, c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que $MF + MF' = 2a$

$FC = F'C = c$

e (excentricité) $= c/a$

$0 < e < 1$ (e = 0 correspond au cercle de centre C, de rayon a).

On peut donner une définition géométrique équivalente de l'ellipse.

En considérant le triangle MFF', on a $r'^2 = r^2 + (2c)^2 + 2 \times 2c \times r \cos\theta$

Avec $r' = 2a - r$ et $c = ea$, on obtient $r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$

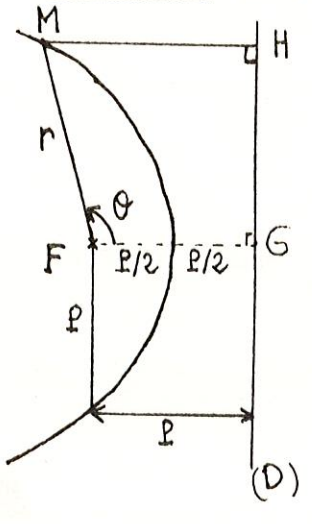
Soit, en posant $p = a(1 - e^2)$ paramètre de l'ellipse,

$$\boxed{r = \frac{p}{1+e\cos\theta}}$$

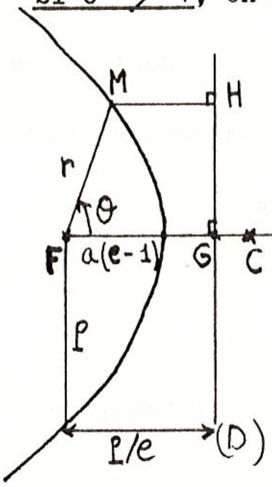
On montre alors aisément que l'ellipse est l'ensemble des points M dont le rapport des distances à un point F (foyer) et à une droite (D) directrice est un nombre constant $e < 1$ ($MF/MH = e$). La distance de F à (D) est p/e.

D'une façon générale une conique est l'ensemble des points M tels que $MF/MH = e$.

Si $e = 1$, on a une parabole $r = \dfrac{p}{1 + \cos\theta}$



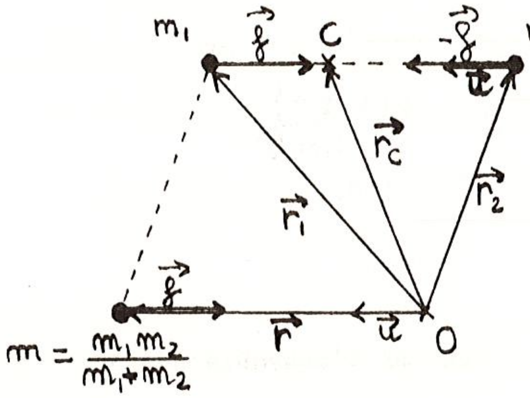
Si $e > 1$, on a une hyperbole.



C'est aussi l'ensemble des points M tels que $MF' - MF = 2a$

d'où $\rho = a(e^2 - 1)$

Réduction du problème :



Le centre de masse C du système isolé (m_1, m_2) est défini par $\vec{r}_c = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}_2$. Ce point a une vitesse rectiligne uniforme. On peut donc décrire le mouvement relatif de m_1 et m_2 dans un repère galiléen centré sur C (ce qui revient à amener O en C).

L'énergie du système est constante

$$\frac{1}{2} m_1 \left(\frac{d\vec{r}_1}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d\vec{r}_2}{dt}\right)^2 - G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = E$$

On a

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = -G\frac{m_1 m_2}{m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2}\vec{u}$$

$$\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -G\frac{m_1 m_2}{m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2}\vec{u}$$

d'où en posant $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}$$

avec $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ masse réduite.

Le problème est donc dynamiquement équivalent à trouver le mouvement d'une masse m, masse réduite de m_1 et m_2, soumise à la force centrale (passant par un point fixe) d'attraction $\dfrac{G m_1 m_2}{r^2}$

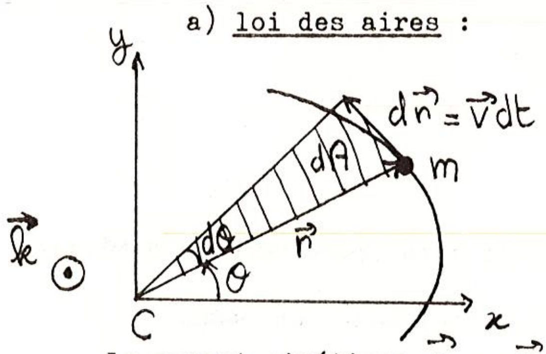
Ainsi on peut vérifier que $\frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 - \frac{G m_1 m_2}{r} = E$

Une fois déterminé $\vec{r}(t)$ (ou $r(\theta)$ équation polaire de la trajectoire de m) on détermine $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ par les transformations

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \\[2ex] \vec{r}_2 = \dfrac{-m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \end{cases}$$

<u>Résolution du problème</u> :

a) <u>loi des aires</u> :



$$\vec{r} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{0} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}\right) - \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{0}}$$

d'où $\vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{\mathcal{C}}$ vecteur constant

ou $r^2 \dfrac{d\theta}{dt} = \mathcal{C}$ (constante aréolaire)

Le moment cinétique $\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = m\vec{\mathcal{C}}$ est un vecteur constant : la trajectoire de m a lieu dans le plan Cxy, passant par C et perpendiculaire à $\vec{\mathcal{C}}$ ($= \mathcal{C}\vec{k}$). Le sens de parcours sur la trajectoire est donné par le signe de $\mathcal{C}$.

Par définition du produit vectoriel, $(\frac{1}{2}\vec{r} \wedge \vec{v}\,dt).\vec{k}$ est l'aire algébrique dA balayée par le rayon vecteur $\vec{r}$ pendant le temps dt.

donc : $$dA = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \times dt = \frac{\mathcal{C}}{2} dt$$

Donc l'aire ΔA balayée par le rayon vecteur pendant l'intervalle de temps Δt est proportionnelle à Δt (loi des aires).

Dans le cas m_2 (masse du Soleil) $\gg m_1$ (masse de la planète)

$m \simeq m_1$: La planète est en m, le centre de masse C est confondu avec le Soleil et on retrouve la 2e loi de Képler.

La loi des aires est vraie pour toute force centrale.

b) <u>forme de la trajectoire</u> :

On la cherche en $r(\theta)$

Il faut résoudre $m\dfrac{d^2r}{dt^2} = -G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$

Après avoir posé $u(\theta) = 1/r(\theta)$ et tenu compte de $r^2\dfrac{d\theta}{dt} = \mathcal{C}$, on aboutit après un calcul simple à l'équation $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = G\dfrac{m_1m_2}{m\mathcal{C}^2}$

(faire le calcul est un bon exercice pour le maniement des dérivées composées)

d'où $u = A\cos(\theta-\alpha) + G\dfrac{m_1m_2}{m\mathcal{C}^2}$

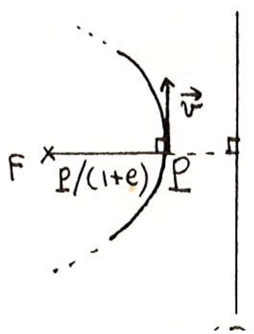
soit $r = \dfrac{m\mathcal{C}^2}{G m_1m_2} \Big/ \left(1 + \dfrac{Am\mathcal{C}^2}{m_1m_2}\cos(\theta-\alpha)\right)$

C'est l'équation d'une conique de foyer C, de directrice perpendiculaire à la droite $\theta_0 = \alpha$, dont on reconnaît les éléments en posant

$$p = \frac{m\mathcal{C}^2}{Gm_1m_2} \quad \text{et} \quad e = Ap$$

Par une rotation appropriée de l'axe Ox, on fait $\alpha = 0$ et l'on a finalement $r = p/(1 + e\cos\theta)$. La nature de la conique dépend de la valeur de e et la valeur de e dépend des conditions initiales imposées au système, comme on peut s'en rendre compte en discutant la valeur de l'énergie.

<u>Expression de l'énergie</u> :



Quelle que soit la trajectoire, le point le plus rapproché P (périhélie ou périgée si le corps attractif est la Terre) est tel que FP $= p(1+e)$ et $v_p = r\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mathcal{C}}{r} = \mathcal{C}\frac{1+e}{p}$

d'où : $E = \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{C}^2(1+e^2)}{p^2} - \frac{Gm_1m_2}{p}(1+e)$

Compte tenu de $p = \frac{m\mathcal{C}^2}{Gm_1m_2}$ on trouve $\boxed{E = \frac{Gm_1m_2}{2p}(e^2-1)}$

On voit donc l'importance des conditions initiales : elles déterminent le signe de E dont dépend la nature de la conique.

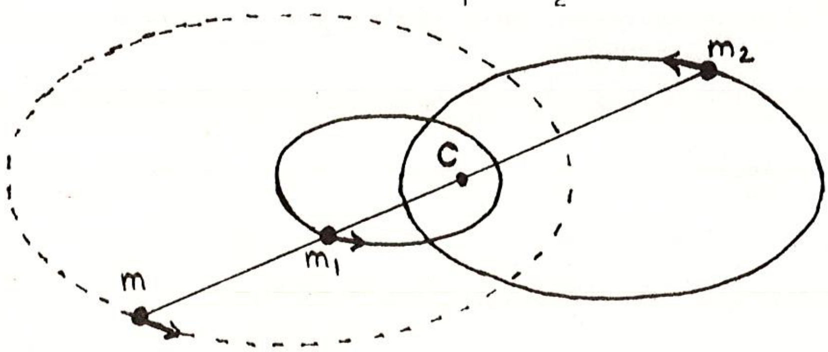
Trajectoire elliptique (1e loi de Képler) :

$e < 1$ et $\boxed{E < 0}$: on voit là un résultat en plein accord avec le théorème du Viriel : un système lié permanent se mouvant donc toujours dans une région finie de l'espace est caractérisé par une énergie totale négative :

$p = a(1-e^2)$ d'où $\boxed{E = -\frac{Gm_1m_2}{2a}}$

formule qu'il peut être utile de savoir. On voit qu'à une valeur déterminée de E correspond une famille infinie de trajectoires elliptiques caractérisées par la même valeur du grand axe.

Les trajectoires de m_1 et m_2 sont du type suivant :



Trajectoire parabolique :

$e = 1$ $\boxed{E = 0}$ Les 2 mobiles s'éloignent indéfiniment l'un de l'autre. Leur vitesse relative s'annule lorsque la séparation est infinie.

On définit la <u>vitesse de libération</u> du système comme étant la vitesse relative minimale pour que l'écartement du système devienne infini (on part d'un système d'écartement donné r_0).

On a alors $E = \frac{1}{2} m v_\ell^2 - G \frac{m_1 m_2}{r_0} = 0$

soit $v_\ell = \sqrt{\frac{2G(m_1+m_2)}{r_0}}$

Dans le cas d'un système Terre-fusée, $m_1 + m_2 \simeq M_\oplus$

$r = R_\oplus$

et $v_\ell = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}} = 11180 \text{ m/s}$

<u>Trajectoire hyperbolique</u> :

$e > 1 \quad \boxed{E > 0}$

Les 2 mobiles s'écartent indéfiniment et leur vitesse relative est finie à l'infini.

$p = a(e^2 - 1) \Rightarrow E = \frac{G m_1 m_2}{2a}$

c) <u>3e loi de Képler</u> :

L'aire d'une ellipse est πab. Si T est la période du mouvement de m autour de C (ou du mouvement relatif de m_1 et m_2), on a

$$\pi ab = \frac{|\mathcal{C}|}{2} T$$

Soit $\pi^2 a^2 b^2 = \frac{\mathcal{C}^2 T^2}{4}$

or $b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1 - e^2)$

et $\mathcal{C}^2 = G \frac{m_1 m_2}{m} p = G(m_1+m_2) a (1-e^2)$

d'où $\pi^2 a^4 (1-e^2) = \frac{G(m_1+m_2)\, a\, (1-e^2)\, T^2}{4}$

soit $\boxed{a^3/T^2 = G(m_1+m_2)/4\pi^2}$

Dans le cas du système solaire, $m_1 + m_2 \simeq M_\odot$ donc pour toutes les planètes $a^3/T^2 = \frac{GM_\odot}{4\pi^2} =$ cste.

IV Problèmes de stabilité :

1) Dimension limite d'un système autogravitant :

Soit un nuage sphérique (pour la commodité) de masse M, en équilibre thermique à la température T.

Soit m la masse moyenne des particules. Quelle est la valeur limite du rayon pour qu'il y ait stabilité ?

On peut définir la stabilité du système par $E < 0$, le système reste toujours dans une région finie de l'espace.

$$\mathcal{T} = \frac{3}{2}\frac{M}{m}kT$$

$$\mathcal{U} = -\alpha\frac{GM^2}{R} \quad \text{avec } \alpha \simeq \frac{3}{5} \text{ pour un système assez dense}$$

d'où

$$\frac{3}{2}\frac{M}{m}kT - \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} < 0 \quad \text{soit} \quad R > \frac{2}{5}\frac{GMm}{kT}$$

Donc pour être stable le nuage doit avoir une taille minimale de l'ordre de $\frac{GMm}{kT}$: un chiffre significatif précis n'aurait pas de sens, notre façon d'aborder le problème étant trop simpliste.

Il est vain de vouloir décrire exactement une réalité physique complexe à partir d'une formalisation abstraite et de calculs faits sur une feuille de papier. Une théorie, aussi séduisante pour l'esprit soit-elle, constitue par nature un reflet approximatif de la réalité, surtout la réalité astrophysique.

2) Limite de Roche :

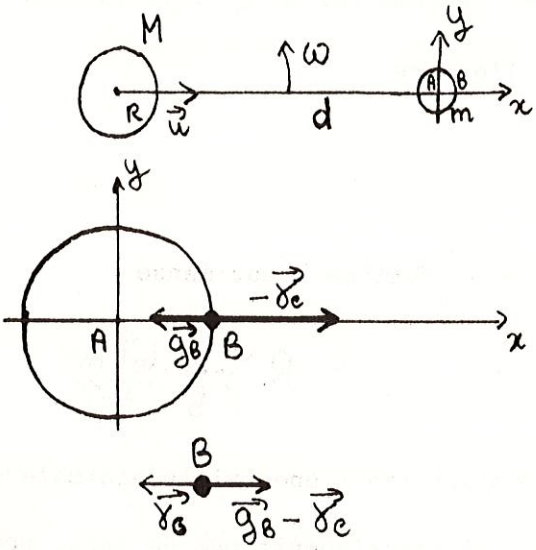
En 1850 Roche a montré qu'un satellite sphérique (de densité moyenne ρ_m) serait détruit par effet de marée s'il s'approchait plus près qu'une certaine distance de la planète primaire (densité ρ_M et rayon R).

Cette distance, limite de Roche, est

$$\boxed{d = 2,45\,(\rho_M/\rho_m)^{1/3} R}$$

pour un satellite fluide prenant une forme ellipsoïdale allongée sous l'effet de marée.

Dérivons l'expression de d pour un satellite rigide.



Supposons une orbite circulaire.

Le centre de gravité A du satellite a un mouvement de rotation de vitesse angulaire ω telle que $\omega^2 d = \frac{GM}{d^2}$

soit $\omega = \sqrt{\frac{GM}{d^3}}$

Dans le repère Axy lié au satellite le point B est soumis à une accélération d'entraînement $\vec{\gamma}_e = -\omega^2(d+r)\vec{u}$

L'accélération résultante sur B dans Axy est donc $\vec{g}_B$ (due à l'attraction de la planète) $- \vec{\gamma}_e$

soit $$-\frac{GM}{(d+r)^2}\vec{u} + \omega^2(d+r)\vec{u} = \omega^2\vec{u}\left(d+r - d\left(\frac{d}{d+r}\right)^2\right)$$

$$\simeq \omega^2\vec{u}\times 3r$$

$$\simeq 3\frac{GMr}{d^3}\vec{u}$$

Il y a rupture si cette accélération, dirigée vers l'extérieur n'est plus équilibrée par l'accélération gravitationnelle $\vec{\gamma}_g$ créée en B par la masse du satellite (la gravité interne du satellite joue le rôle de force de cohésion) $\vec{\gamma}_G = -\frac{Gm}{r^2}\vec{u}$

d'où $\frac{Gm}{r^2} = 3\frac{GMr}{d^3}$ soit $d = r(3M/m)^{1/3}$

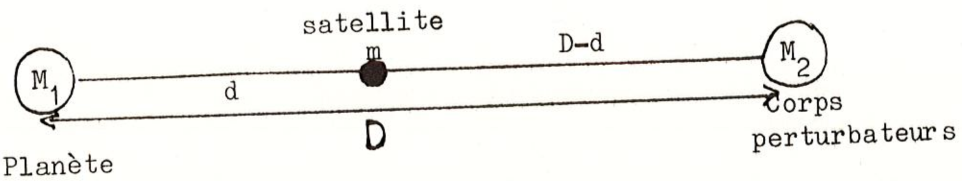
d'où $\boxed{d = 1{,}44\,(\rho_M/\rho_m)^{1/3} \times R}$

Tous les satellites naturels du système solaire orbitent au-delà de la limite de Roche. La limite de Roche de la Terre pour la Lune est $\sim$ 2,7 R⊕ Par contre les anneaux de Saturne sont entièrement à l'intérieur de la limite de Roche : Ils pourraient donc être les restes d'un satellite pulvérisé par effet de marée. On pense plutôt qu'il s'agit des restes du nuage primitif de Saturne n'ayant pu se condenser pour former un satellite.

On peut généraliser le problème de la limite de Roche à tout corps si on a une idée de ses forces de cohésion interne : Ce corps ne se fractionnera pas si elles sont supérieures à l'attraction gravitationnelle différentielle (ou effet de marée) exercée par un corps massif.

3) Limite d'instabilité

Il ne s'agit plus de stabilité interne mais de stabilité orbitale. La limite d'instabilité est la distance au delà de laquelle un satellite quitte sa planète sous l'effet de la perturbation d'un troisième corps (Soleil, planète...)



$d \ll D$

Le perturbateur de masse M_2 crée une accélération différentielle sur le système Planète-Satellite

$$G M_2 /(D-d)^2 - G M_2 / D^2 \simeq 2 G M_2 /d\, D^3$$

Il y a rupture du système si cette accélération est supérieure à l'accélération gravitationnelle créée par la planète sur le satellite $G M_1 / d^2$

d'où la limite d'instabilité $\boxed{d = (M_1/2M_2)^{1/3} D}$

Pour le système Terre-Lune perturbé par le Soleil on trouve $d = 1{,}7\,10^6$ km.

Ce problème a de nombreuses applications. Ainsi, certaines comètes dont l'aphélie est à grande distance du Soleil peuvent s'évader du système solaire sous l'effet des perturbations des étoiles proches.